DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Kümeler**
ÜNİTE NO **1**
YAZAR **Prof.Dr. İSA YILDIRIM**

KÜME KAVRAMI

İyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesnelerin oluşturduğu topluluğa küme denir. Bir kümeyi oluşturan nesnelere kümenin elemanları denir. Kümeler genellikle A,B,C,X … gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise a,b,c,x … gibi küçük harflerle gösterilir. Bir A kümesinin eleman sayısı gösterilirken genellikle s(A) veya n(A) sembolleri kullanılır. Bu kitapta s(A) gösterimi kullanılacaktır. Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme, □ veya {┤ } sembollerinden biri ile ifade edilir.

KÜMELERİN GÖSTERİMLERİ

Kümeler gösterilirken aşağıdaki üç yöntemden biri kullanılır. Liste yöntemi Ortak özellik yöntemi Venn şeması yöntemi Liste Yöntemi Kümenin elemanları, küme parantezine alınarak ve elemanlar virgülle birbirinden ayrılarak gösterilir. Küme parantezi "{┤ }" şeklindedir. Ortak Özellik Yöntemi Bir kümenin tüm elemanlarının sağladığı ortak özellikler varsa bu özellikler yardımıyla küme gösterilebilir. Küme yazılırken "öyle ki" anlamına gelen ":" veya "|"┤ sembolü kullanılarak elemanların sağladığı özellikler parantez içinde yazılır. Örneğin, k özelliğine sahip elemanların kümesine A dersek A={x:x,k özelliğine sahiptir} veya A={x│x,k özelliğine sahiptir} şeklinde yazılır. Bu iki küme "x öyle ki x, k özelliğine sahiptir" veya "k özelliğine sahip x elemanlarının kümesi" şeklinde okunur. Venn Şeması Yöntemi Kümenin elemanları kapalı bir eğri (daire, kare, dikdörtgen vb.) içine yanlarına nokta konularak yazılır.

KÜMELER ÜZERİNDE İŞLEMLER

Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir ve "=" sembolü kullanılarak gösterilir. Örneğin, A ve B kümeleri eşit ise A=B şeklinde, bu kümeler eşit değilse A≠B şeklinde gösterilir. A ve B herhangi iki küme olsun. Eğer A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı oluyorsa A ya B nin alt kümesi denir ve bu A□B ile gösterilir. "A alt küme B" diye okunur. Aynı zamanda bu ifade B□A şeklinde de yazılabilir ve "B kapsar A" diye okunur. Eğer A□B ve A≠B ise A ya B nin öz (has) alt kümesi denir ve A□B şeklinde gösterilir. Diğer bir deyişle, bir kümenin alt kümelerinde kümenin kendisi de bulunur. Kümenin kendisi hariç alt kümeleri, bu kümenin öz alt kümelerini oluşturur. Alt küme ile ilgili aşağıdaki özellikler verilebilir. A,B ve C boş olmayan kümeler olsun. Bu durumda; Her A kümesi için A□A ve □ □A, A□B ve B□A ise A=B, A□B ve B□C ise A□C'dir. Eleman sayısı n olan bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n ve öz alt kümelerinin sayısı ise 2^n-1 dir. Üzerinde çalıştığımız en geniş kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir. Tanım 1.6. A ve B iki küme olmak üzere; A ve B kümelerinden en az birine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A ile B kümelerinin birleşimi denir. Bu küme A□B ile gösterilir. A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin kesişimi (arakesiti) denir. Bu küme A∩B ile gösterilir. A kümesinin elemanı olduğu hâlde B kümesinin elemanı olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin farkı denir. Bu küme A□B veya A-B şeklinde gösterilir. E evrensel küme olmak üzere, A kümesinde olmayan fakat E 'de olan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A^t veya E□A şeklinde gösterilir. Herhangi bir A kümesi için (A^t)^t=A 'dır. A ve B kümeleri verilsin. Bu kümelerden birine ait olup diğerine ait olmayan elemanların kümesine A ve B kümelerinin simetrik farkı denir ve AΔB ile gösterilir. Bu küme; AΔB=(A□B)□(B□A) veya AΔB=(A□B)□(A∩B) olarak ifade edilir. Evrensel Küme İle İlgili Özellikler E bir evrensel küme ve A,B□E olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler yazılabilir: 1) A□E=E 2) A∩E=A 3) □ □E=E 4) □ ∩E=□ 5) E=A□A^t Birleşim İşlemi İle İlgili Özellikler A,B ve C kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır: 1) A□A=A 2) A□B=B□A 3) A□ □=A 4) A□(A□B),B□(A□B) 5) (A□B)□C=A□(B□C) 6) s(A□B)=s(A)+s(B)-s(A∩B) 7) s(A□B□C)=s(A)+s(B)+s(C)-s(A∩B)-s(A∩C) -s(B∩C)+s(A∩B∩C)'dir. Kesişim İşlemi İle İlgili Özellikler A,B ve C kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır: 1) A∩A=A 2) A∩B=B∩A 3) A∩□=□ 4) (A∩B)□A,(A∩B)□B 5) (A∩B)∩C=A∩(B∩C) 6) Eğer A ve B kümeleri ayrık (yani A∩B=□) ise s(A□B)=s(A)+s(B)'dir. Kümeler üzerinde tanımlanan birleşim ve kesişim işlemlerinin birbiri üzerlerine dağılma özellikleri vardır. A,B ve C kümeleri verilsin. Buna göre; 1) A□(B∩C)=(A□B)∩(A□C) 2) (B∩C)□A=(B□A)∩(C□A) 3) A∩(B□C)=(A∩B)□(A∩C) 4) (B□C)∩A=(B∩A)□

(C∩A) özellikleri vardır. Bu bölümde son olarak fonksiyonların tanımında ve grafik çizimlerinde de kullanılacak olan aşağıdaki tanım verilecektir. A ve B boş olmayan herhangi iki küme olsun. a□A ve b□B olmak üzere (a,b) ikililerinin oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve A×B ile gösterilir. Buna göre; A×B={(a,b): a□A,b□B}'dir. Yukarıdaki tanımdan da görüleceği gibi A×B kümesi, birinci elemanı A kümesinden ve ikinci elemanı B kümesinden alınarak elde edilen sıralı ikililerden oluşan kümedir. Kartezyen Çarpımın Özellikleri A,B ve C kümeleri için kartezyen çarpımla ilgili aşağıdaki özellikler vardır: 1) A×□=□ veya □×A=□ 2) (A×B)×C=A×(B×C) 3) A×(B□C)=(A×B)□(A×C) 4) A×(B∩C)=(A×B)∩(A×C) 5) s(A×B)=s(A).s(B)=s(B).s(A)=s(B×A) 6) s(A×B×C)=s(A).s(B).s(C) 'dir.

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Sayılar**
ÜNİTE NO **2**
YAZAR **Prof.Dr. İSA YILDIRIM**

SAYI KÜMELERİ

Sayı kümeleri sırasıyla doğal sayılar, tam sayılar (pozitif tam sayılar ve negatif tam sayılar), rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve reel sayılardır. Bir çokluğu belirtmek veya bir şeyleri saymak için kullanılan ve rakam adı verilen 0,1,2,…,8,9 sembolleri ile yazılabilen sayıların tümüne doğal sayılar kümesi denir. Doğal sayılar kümesi; N={0,1,2,3,…,n,n+1,…} şeklinde gösterilir. Doğal sayılar kümesinden 0 (sıfır) sayısının çıkarılmasıyla elde edilen {1,2,3,…,n,n+1,…} kümesine, sayma sayıları kümesi denir. N kümesindeki her bir elemanın ters işaretlilerinin (negatif (-)) ve sıfırın eklenmesiyle oluşan sayı kümesine tam sayılar kümesi denir. Tam sayılar kümesi; Z={…,-n,…,-2,-1,0,1,2,…,n,…} şeklinde gösterilir. Pozitif tam sayılar kümesi; Z^+={ 1,2,…,n,…} ve negatif tam sayılar kümesi de; Z ^-={…,-n,…,-2,-1} şeklinde gösterilir. Paydadaki tam sayı sıfırdan farklı olmak şartıyla herhangi iki tam sayının birbirine oranı olarak tanımlanan kümeye rasyonel sayılar kümesi denir ve Q= { x:x=a/b,a,b□Z ve b≠0} şeklinde gösterilir. Bir rasyonel sayının payının paydasına bölünmesiyle elde edilen sayıya, verilen rasyonel sayının ondalık yazılımı denir. Her rasyonel sayının sonlu veya sonsuz bir ondalık yazılımı vardır. Bir rasyonel sayının ondalıklı gösteriminde sayının virgülden sonraki herhangi bir kısmı sürekli tekrar ediyorsa bu tür sayılara devirli ondalık sayı denir. Böyle sayılar tekrar eden (veya devreden) sayının üstüne bir çizgi çizilerek; 1/3=0,3333…=0,3¯,1/6=0.16666…=0,16¯ şeklinde gösterilebilir. a ve b birer tamsayı ve b≠0 olmak üzere a/b şeklinde yazılamayan sayılara irrasyonel sayı denir. İrrasyonel sayılar kümesi, Q^t,R-Q veya R□Q sembollerinden birisi ile gösterilebilir. Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi olan kümeye reel (gerçel) sayılar kümesi denir ve R ile gösterilir. Yukarıda tanımlanan kümeler arasında; N□Z□Q□R şeklinde bir kapsam bağıntısı vardır.

REEL SAYILARDA SIRALAMA ÖZELLİKLERİ

Reel sayılar geometrik olarak ifade edilirken bir doğru çizilir ve tüm reel sayılar bunun üzerinde gösterilir. Buna sayı doğrusu veya reel eksen de denir. Sayı doğrusu üzerinde a ve b reel sayıları verilsin. Eğer a sayısı b sayısının solunda yer alıyorsa a sayısı b sayısından küçüktür denir. ab yazılır ve "a büyüktür b" diye okunur. a ve b reel sayıları verilsin. Eğer a=b veya ab ise a≥b yazılır ve "a büyük eşit b" şeklinde okunur. Reel sayılar üzerinde tanımlanan sıralama ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir. a,b,c ve d□R olmak üzere 1) a0 ise a.cb.c 6) a0 ise a/cb/c 8) 01/b 9) a^2a ise a1'dir.

ARALIKLAR

Aralıklar, küme olarak reel sayıların bir alt kümesi, geometrik olarak da sayı doğrusunun bir parçasıdır. (a,b)={x:x□R,aa ise x>a veya x **ÜSLÜ VE KÖKLÜ SAYILAR**

a□R ve m□Z^+ olmak üzere; şeklinde m tane a sayısının çarpımı olan a^m sayısına "a nın m-inci kuvveti" denir. a^m ifadesindeki a 'ya taban, m 'ye ise üs (yada kuvvet) denir. a≠0,a□R ve m□Z^+ olmak üzere; a^(-m)=1/a^m olarak tanımlanır. Ayrıca sıfırdan farklı her reel sayının sıfırıncı kuvveti 1 dir yani a^0=1 olur. Üslü sayılarla ilgili diğer özellikler aşağıdaki gibi verilebilir. a ve b sıfırdan farklı reel sayılar ve m ve n de birer sayı olmak üzere; a^m.a^n=a^(m+n) □ □(a□^m)□^n=a^(m.n) □(a.b)□^m=a^m.b^m a^m/a^n =a^(m-n) (a/b)^m=a^m/b^m (a/b)^(-m)=(b/a)^m'dir. a□R ve m≥2 bir tam sayı olmak üzere √(m&a) sayısına a nın m. kuvvetten veya dereceden kökü denir. √(m&a) sayısı aynı zamanda a^(1⁄m) şeklinde de gösterilir. Eğer özel olarak √(m&a) ifadesinde m=2 alınırsa √(2&a) veya bunun yerine kısaca √a yazılır. Bu ifade "karekök a", m=3 olarak alınırsa □a ifadesi "küp kök a" diye okunur. Ayrıca √a ve □a sayıları yukarıdaki tanımdaki gibi sırasıyla a 'nın 2. dereceden kökü ve a nın 3. dereceden kökü diye de ifade edilir. Köklü sayılarla ilgili aşağıdaki özellikler verilebilir. a,b□R ^+ ve m,n□Z^+ olmak üzere, 1) √(m&a^n)=a^(n⁄m) 2) √(m&a.b)=√(m&a).√(m&b) 3) √(m&a/b)=√(m&a)/√(m&b) 4) √(n&√(m&a))=√(n.m&a) 5) x.√(m&a)±y.√(m&a)=(x±y) √(m&a) (x,y□R) 6) a^n.√(m&b)=√(m&a^(n.m).b) 'dir.

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Özdeşlikler ve Denklemler**
ÜNİTE NO **3**
YAZAR **Prof.Dr. NEJMİ CENGİZ**

Özdeşlikler İçinde bilinmeyenler bulunduran ve bilinmeyenlere uygulanan bazı işlemler sonucu elde edilen ifadelere cebirsel ifadeler denir. Örneğin; $5x-4$, $2x^2+3$,x^2+y+1 ifadelerinin herbiri cebirsel ifade olarak adlandırılır. Bir cebirsel ifade içindeki bilinmeyenlere değişken denir. Cebirsel ifadeler içinde bulundurdukları değişkenlerin sayısına göre bir değişkenli, iki değişkenli veya n değişkenli cebirsel ifade olarak adlandırılır. Aynı değişkenlere sahip iki cebirsel ifade verilmiş olsun. Değişkenlere verilen her değer için eşit olan cebirsel ifadelere özdeşlik adı verilir. Örnek olarak; $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ eşitliği bir özdeşliktir. Çarpanlara Ayırma: Verilen çok terimli cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırmada genel bir yöntem yoktur. Aşağıda verilen yöntemler, özel yöntemlerdir. Problemin verilişine göre uygun yöntem kullanılır. Bunlardan biri, Ortak Çarpan Parantez Yöntemidir. Verilen cebirsel ifadede bütün terimlerin ortak bir çarpanı varsa o ifadeyi ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayırabiliriz. Bazen verilen cebirsel ifadenin bütün terimlerinde bir ortak çarpan bulunmayabilir. Ancak, cebirsel ifadenin terimlerini belirli gruplara ayırarak ortak çarpanlar oluşturulabilir. Diğer bir yöntem ise özdeşliklerden yararlanma yöntemidir.

DENKLEMLER

$n\square N$ ve $a_0,a_1,\dots,a_n\square R$ olmak üzere; $a_n x^n+\square+a_1 x+a_0=0$ $(a_n\neq 0)$ (1) şeklindeki ifadeye n. dereceden bir bilinmeyenli polinom denklem denir. Bu bölümde $n=1$ ve $n=2$ alınarak birinci ve ikinci dereceden denklemler incelenmiştir. Birinci derece denklemler, $a\neq 0$, $a,b\square R$ olmak üzere $ax+b=0$ biçiminde olan bu denklemle 1. dereceden denklem (lineer veya doğrusal denklem) denir. Bu denklemin çözümü; $ax+b=0$ $\square ax=-b$ $\square x=-b/a$ olur. İkinci dereceden denklemler, a,b,c sabit reel sayılar, $a\neq 0$ ve x bilinmeyen olmak üzere, $ax^2+bx+c=0$ biçimindeki denklemlere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Bu denklemin kökleri (çözüm kümesi), diskriminantı $\Delta=b^2-4ac$ olmak üzere, $x_1=(-b+\sqrt{\Delta})/2a$, $x_2=(-b-\sqrt{\Delta})/2a$ sayıları olur. Buna göre, $\Delta>0$ ise, kökler iki farklı reel sayıdır, $\Delta=0$ ise, kökler eşittir (çakışıktır), Δ

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Oran Orantı ve Denklem Problemleri**
ÜNİTE NO **4**
YAZAR **Prof.Dr. NEJMİ CENGİZ**

Matematiğin temel konularından olan ve daha sonra göreceğimiz bir çok konuda karşılaşacağımız oran ve orantı konusu bir çok matematiksel işlemde kullanılacaktır. İktisat, işletme mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde olmak üzere günlük hayatta da bir çok alanda ihtiyaç duyarız.

ORAN VE ORANTI: Aynı cins iki çokluğun birbirine bölünmesine oran, iki veya daha çok oranın birbirine eşitliğine orantı denir. O hâlde a/b ifadesi a nın b ye oranıdır. a/b ve c/d iki oran olmak üzere a/b=c/d eşit ise orantı olur. Her orantı a/b=c/d=k olacak şekilde bir k orantı sabitine sahiptir. Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri de artıyor veya biri azalırken diğeri de azalıyor ise bu çokluklara doğru orantılıdır denir. Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri azalıyor veya biri azalırken diğeri artıyor ise bu çokluklara ters orantılıdır denir. $a_1,a_2,\ldots,a_n$ gibi n tane sayının aritmetik ortalaması $A.O=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$ eşitliği ile verilir. $a_1,a_2,\ldots,a_n$ gibi n tane sayının geometrik ortalaması $G.O=\sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots.a_n}$ olarak verilir. İnsanlar günlük hayatlarında farkında olsun veya olmasın birçok problemin çözümü için zihninden denklem kurar ve çözüm yapar. Çoğu zaman problemleri çözmek için problemde verilen duruma uygun düşen bir matematiksel ifade oluşturur. Bunların en çok kullanılanı sayı problemleridir. Faiz problemlerinde Faiz = Ana para. yüzde oranı . zaman formülü kullanılır. Sembolik olarak bu formül F=A.n.t şeklinde gösterilir. Hareket problemlerini çözerken, l yol, t zaman, v hızı göstermek üzere, l=v.t (Yol=Hız .Zaman) Ortalama hız=(Toplam yol)/(Toplam zaman) formülü kullanılır. Diğer taraftan karışım problemlerin çözerken, Karışım oranı=(Saf madde)/(Tüm karışım) eşitliği kullanılır.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Lineer Denklemler ve Eşitsizlikler**
ÜNİTE NO **5**
YAZAR **Prof.Dr. ABDULLAH MAĞDEN**

LİNEER DENKLEMLER ve EŞİTSİZLİKLER
Denklem ve eşitsizlik kavramlarının ne olduğu hakkında genel bir bilgiye sahip olduğunuzu biliyoruz. Denklemlerin yazılış biçimlerine, ihtiva ettiği terimlere bağlı olarak çeşitli isimler ile ifade edilmektedir. Bu ünitede, birinci başlıkta Lineer Denklemler ikinci başlıkta ise Eşitsizlikler verilmiştir. Lineer Denklemler a,b R reel sayılar, x bilinmeyen olmak üzere ax+b=0 biçimindeki denklemlere bir bilinmeyenli lineer denklem adı verilir. a,b,c R reel sayılar, x ve y bilinmeyenler olmak üzere ax+by+c=0 biçimindeki denklemlere iki bilinmeyenli lineer denklem adı verilir. Lineer denklem, terimlerinin her biri ya birinci dereceden değişken ya da bir sabit olan denklemlerdir. Böyle denklemlere "doğrusal (lineer) " denmesinin nedeni içerdikleri terim ve değişkenlerin sayısına bağlı olarak düzlemde bir doğru belirtmesindendir. Bir ve iki bilinmeyenli lineer denklemlerin çözümleri örnekleri ile incelenmiştir. İki bilinmeyenli lineer denklemlerin çözüm kümeleri grafikle gösterilmiştir. Lineer denklemin özel durumda grafiklerinin nasıl olduğu hakkında bilgiler verilmiştir. Eşitsizlikler Eşitsizlikler bölümünde bir bilinmeyenli birinci ve ikinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümelerinin nasıl bulundukları tablolar oluşturularak örnekleriyle açıklanmıştır. Ayrıca, iki bilinmeyenli birinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümeleri bulunmuştur. ax+b>0,ax+b≥0, ax+b

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Lineer Denklem ve Eşitsizlik Uygulamaları**
ÜNİTE NO **6**
YAZAR **Prof.Dr. ABDULLAH MAĞDEN**

LİNEER DENKLEM VE EŞİTSİZLİK UYGULAMALARI

Cebirsel işlemlerin yararını anlayabilmek için günlük hayatta karşılaşılan problemlerin matematiksel olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Çoğu zaman problemleri çözmek için problemde verilen duruma uygun düşen bir matematiksel ifade oluşturulur. Buna matematiksel modelleme denir. Bu modellemelerde biri de doğrusal (lineer) modeldir. Bu ünitede ilk olarak Lineer denklem uygulamaları lineer modeller oluşturularak verilmiştir.

Lineer Denklem Uygulamaları

• İki bilinmeyenli lineer denklem uygulamaları tanıtılarak günlük yaşamda karşılaşılan örnekler verilmiştir.
• Fiyatı değişken olarak kabul edersek arz ve talep miktarlarını fiyata bağlı olarak lineer bir denklemle ifade edebiliriz. Arz ve talep miktarlarının eşit olduğu fiyata denge fiyatı denir. Denge fiyatına karşılık gelen arz-talep miktarlarına ise denge miktarları denir. (denge fiyatı, denge miktarı) ikilisine denge noktası veya denge durumu adı verilir. Fiyat arttıkça arz artacağından, talep ise azalacağından arz denklemini artan bir doğru ile talep denklemini de azalan bir doğru ile temsil edilir.
• Birinci bölümde Lineer Denklem Uygulamaları ile ilgili uygulamalara yer verilmiş, özel olarak ekonomide çok karşılaşılan arz-talep modeli ve başabaş analizi gibi uygulamalara ait örnekler verilmiştir.
• İki bilinmeyenli lineer denklemlerin çözüm kümeleri grafikle gösterilmiştir.
• Lineer denklemin özel durumda grafiklerinin nasıl olduğu hakkında bilgiler verilmiştir.

Eşitsizlik Uygulamaları

• İkinci bölümde ise zaman zaman karşılaştığımız alternatiflerin hangilerinin daha uygun olacağına karar verebileceğimizi belirleyebilen eşitsizlik uygulamalarına dair örnekler verilmiştir.
• Bir ve iki bilinmeyenli lineer denklemlerin ve lineer eşitsizliklerin çözümleri örnekleri ile incelenmiştir.
• Eşitsizlikler bölümünde bir bilinmeyenli birinci ve ikinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümelerinin nasıl bulundukları tablolar oluşturularak örnekleriyle açıklanmıştır.
• Ayrıca, iki bilinmeyenli birinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümeleri bulunmuştur.
• İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler verilerek çözüm kümelerinin nasıl bulundukları anlatılmıştır.
• Mutlak değerli eşitsizlikler tanıtılarak örnekler verilmiştir

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Fonksiyonlar**
ÜNİTE NO **7**
YAZAR **Prof.Dr. ÖMER TARAKCI**

Özet hazırlanmaktadır. Tamamlandığında yüklenecektir.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Polinom Fonksiyonlar**
ÜNİTE NO **8**
YAZAR **Prof.Dr. ÖMER TARAKCI**

POLİNOM FONKSİYONLAR TANIM:
A_0,A_1,A_2,...,A_N sabit reel sayılar ve a_n≠0 olmak üzere f(x)=a_n x^n+a_(n-1) x^(n-1)+ ...+a_2 x^2+a_1 x^2+a_0 fonksiyonuna n yinci dereceden bir polinom fonksiyon denir. Polinom fonksiyonların en geniş tanım kümesi R reel sayılar kümesidir. Fonksiyon Derecesi a) f(x)=3 Sıfırıncı dereceden polinom fonksiyon (y=3x^0) b) f(x)=-2/7 x+4 Birinci dereceden polinom fonksiyon c) f(x)=5x^2-x+2/3 İkinci dereceden polinom fonksiyon d) f(x)=-6x^3+1 Üçüncü dereceden polinom fonksiyon e) f(x)=x^5-2x^(3)+x-4 Beşinci dereceden polinom fonksiyon Birinci Dereceden Polinom Fonksiyonlar Birinci dereceden bir polinom fonksiyon y=f(x)=mx+n, m≠0 şeklindedir. Birinci dereceden bir polinom fonksiyonun grafiği doğrudur. m=0 olursa fonksiyon sıfırıncı derecedendir. Yani sabit fonksiyon olur. m ye doğrunun eğimi denir. Doğru y eksenini n de keser. Bu fonksiyonlara lineer (doğrusal) fonksiyonlar da denir. Birinci dereceden bir fonksiyonun grafiğini çizmek için herhangi iki noktasını bulup, bu noktalardan geçen doğruyu çizmek yeterlidir. Grafiğin eksenleri kestiği noktalardan da yararlanılabilir. Doğrunun Özellikleri Doğrunun Eğimi ve Verilen İki Noktadan Geçen Doğrunun Denklemi A(x_1,y_1) ve B(x_2,y_2) gibi iki noktadan geçen doğrunun eğimi ..m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=(y deki değişim)/(x deki değişim)=(Dikey değişim)/(Yatay değişim).. olarak tanımlanır. A(x_1,y_1) ve B(x_2,y_2) noktalarından geçen doğru denklemi (x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1) olarak bulunur. Düzenlenip y yalnız bırakılırsa doğrunun denklemi, elde edilir. Bu denklem y=mx+n şeklinde yazılır. Buradaki m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1) oranı y=mx+n doğrusunun eğimine karşılık gelir. Bir Noktası ve Eğimi verilen Doğrunun Denklemi (x_1,y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan doğru üzerinde herhangi bir nokta (x,y) ise bu iki nokta için eğim formülünden (y-y_1)/(x-x_1)=m y-y_1=m(x-x_1) elde ederiz. Bu son eşitlik (x_1,y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemidir. Eksenlere paralel doğrular x-eksenine paralel bir doğru üzerindeki bütün noktaların ikinci koordinatları eşit olduğundan eğimi m=0 olur. Bu doğru y-eksenini (0,a)'da kesiyorsa denklemi y=a'dır. y-eksenine paralel bir doğru üzerindeki bütün noktaların birinci koordinatları eşit olduğundan eğimi tanımsızdır. Bu doğru x-eksenini (b,0)'da kesiyorsa denklemi x=b'dir. Buna göre, Eğim, x deki bir birimlik artışa karşılık y de kaç birimlik artma veya azalma olduğunu belirtir. Yatay doğrunun eğimi sıfırdır. Dikey doğrunun eğimi tanımsızdır. Soldan sağa doğru yükselen doğrunun eğimi pozitiftir. Soldan sağa doğru alçalan doğrunun eğimi negatiftir. Paralel ve Dik Doğrular İki doğrunun eğimleri aynı ise bu doğrulara paralel doğrular denir. Ayrıca x=a ve x=b gibi (eğimleri tanımsız) y- eksenine paralel doğrular da birbirine paraleldir. Eğimleri m_1 ve m_2 olan iki doğru için m_1 m_2=-1 ise bu iki doğru birbirine diktir.
İKİNCİ DERECEDEN POLİNOM FONKSİYONLAR VE PARABOL
a,b ve c reel sabitler ve a≠0 olmak üzere y=ax^2+bx+c eşitliği ile verilen fonksiyon ikinci dereceden bir polinom fonksiyondur. İkinci Dereceden Polinom Fonksiyonun Grafiği (Parabol) y=ax^2+bx+c ikinci dereceden polinom fonksiyonun grafiği parabol olarak adlandırılır. Bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi R reel sayılar kümesidir. a>0 ise grafik koordinat düzleminde yukarı doğru sınırsız olarak genişlemektedir. Bu durumda parabolün kolları yukarı doğrudur deriz. a0 ise y en küçük değerini, a

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Üstel ve Logaritma Fonksiyonu**
ÜNİTE NO **9**
YAZAR **Prof.Dr. ÖMER TARAKCI**

ÜSTEL FONKSİYON

Üstel fonksiyonlar, örneğin, nüfus büyümesi veya bileşik faiz hesaplamaları, yatırım büyümesi gibi karşılaşılan problemlerin modellenmesinde kullanılan fonksiyonlardan biridir. Logaritma (logaritmik) fonksiyonlar ise üstel fonksiyonların ters fonksiyonlarıdır. a pozitif bir reel sayı ve $a\neq1$ olsun. $f:R\rightarrow R$, $f(x)=a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a ya da üstel fonksiyonun tabanı denir. Burada bağımsız değişken kuvvettedir. Üstel fonksiyonun görüntü kümesi pozitif reel sayılar kümesidir. Üstel fonksiyonun grafiği çizilirken a 'nın (tabanın) 1 'den büyük veya 1 'den küçük olmasına göre aşağıdaki gibi çizilir. $f(x)=a^x$, $1>a, x\in R$ Tanım kümesi : $R=(-\infty,\infty)$ Görüntü kümesi : $R^+=(0,\infty)$ Diğer : y-eksenini (0,1) de keser. Artan fonksiyondur. $f(x)=a^x$, 00,$a\neq1$ olmak üzere $f:R\rightarrow R^+$, $f(x)=a^x$ üstel fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyon olduğundan ters fonksiyonu vardır. Üstel fonksiyonun ters fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir. Buna göre; $f:R^+\rightarrow R$, $f(x)=\log_a x$ $a>0, a\neq1$ Biçiminde tanımlanan fonksiyona logaritma fonksiyonu denir. Üstel ve logaritma fonksiyonlarından biri diğerinin ters fonksiyonu olduğuna göre, aralarında $y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$ bağıntısı vardır Ayrıca, $a>0$ için $a^o=1$ olduğundan $\log_a 1=0$ ve $a^1=a$ olduğundan $\log_a a=1$'dir. Logaritma fonksiyonunda tabanın ' e=2,71828… ' alınırsa bu fonksiyona doğal logaritma fonksiyonu denir. Doğal logaritma fonksiyonu $f(x)=\ln x$ şeklinde gösterilir. $f(x)=\log_e x=\ln x, x>0$ Logaritma fonksiyonunda taban genellikle e ya da 10 olarak alınır. Taban 10 seçildiği zaman genellikle taban yazılmaz. $f(x)=\log_{10} x=\log x, x>0$ $y=\log_a x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden biri gibidir. Logaritma ile ilgili aşağıdaki özellikler yazılabilir. $a>0$ ve $a\neq1$ olmak üzere 1. Pozitif olmayan reel sayıların logaritması tanımlı değildir. 2. $\log_a 1=0$ 3. $\log_a a=1$ 4. $\log_a (u\cdot v)=\log_a u+\log_a v$ 5. $\log_a (u/v)=\log_a u-\log_a v$ 6. $\log_a u^b =b\cdot\log_a u$ 7. $\log_b c=\log_a c/\log_a b$ (Taban değiştirme formülü) 8. $a^{\log_a x} =x$

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Limit ve Süreklilik**
ÜNİTE NO **10**
YAZAR **Prof.Dr. SEZGİN AKBULUT**

Limit Limit, önce sezgisel olarak tanıtıldı. Yani, A□R, f:A→R, y=f(x) bir fonksiyon ve özel olarak a□A olmak üzere x (x≠a) değişkeni bir a sayısına yeterince yaklaştığında f(x) değerlerinin belli bir L sayısına yaklaşıp yaklaşmadığı örnekler üzerinden verildi. Sonra bu x değişkenin a sayısına farklı şekillerde yaklaştırılabileceği görüldü. Bu yaklaşım her ne şekilde olursa olsun f(x) değerleri belli bir tek L sayısına yaklaşıyorsa bu L sayısına, f(x) in a noktasındaki limiti denilir. Ancak görüldü ki bu yöntem çok kullanışlı değildir. Bu sebeple ispatsız olarak limit alma kuralları verildi. Limit Alma Kuralları A□R olmak üzere f:A→R ve g:A→R fonksiyonları verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler mevcuttur. c□R olmak üzere, f(x)=c ise lim┬(x→a) □f(x)=lim┬(x→a) □c=c□ □f(x)=x ise lim┬(x→a) □f(x)=lim┬(x→a) □x=□ a□ lim┬(x→a) f(x)=L_1 ve lim┬(x→a) g(x)=L_2 olmak üzere lim┬(x→a) [f(x)+g(x)]=lim┬(x→a) □f(x)+□ lim┬(x→a) □g(x)=L_1+L_2 □ dir. lim┬(x→a) [f(x).g (x)]=lim┬(x→a) □f(x).□ lim┬(x→a) □g(x)=L_1 L_2 □ dir. lim┬(x→a) □f(x)/g(x) □=lim┬(x→a) f (x)/(lim┬(x→a) g(x))=L_1/L_2 , g(x)≠0 ve L_2≠0 dır. lim┬(x→a) f(x)=L ve n□N olsun. Bu durumda, lim┬(x→a) √(n&f(x))=√(n&lim┬(x→a) f(x))=√(n&L) olur. Burada eğer n□N çift sayı ise lim┬(x→a) f(x)=L≥0 olmalıdır. Tek Yönlü Limit Bazı durumlarda zorunlu olarak tek yönlü limit almak gerekebilir. Ancak bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa (lim)┬(x→a) f(x)=L□ (lim)┬(x→a^+) f(x) = (lim)┬(x→a^-) f(x)=L olur. Yani, fonksiyonun bir noktada limiti varsa, o noktadaki sağdan ve soldan limitleri vardır ve birbirine eşittir. Tersine sağdan ve soldan limitler var ve birbirine eşit ise o noktada limit vardır. Süreklilik a noktasında tanımlı olan bir fonksiyonun bu noktadaki limiti ile fonksiyonun o noktadaki değeri arasında bir irtibat kuruldu. A□R olmak üzere, f:A→R bir fonksiyon ve a□A olsun. (lim)┬(x→a) f(x)=f(a) ise f(x) fonksiyonu x=a noktasında süreklidir denir. Yani, y= f(x) fonksiyonun tanım kümesinde bulunan bir a noktadaki limiti fonksiyonun a noktasındaki değerine eşit ise bu durumda f(x) fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir. y= f(x) fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında sürekli ise bu durumda fonksiyon A da süreklidir denir. Ayrıca, geometrik olarak fonksiyonun grafiği biliniyorsa, grafikten faydalanılarak fonksiyonun sürekli veya süreksiz olduğu noktaların tespiti yapıldı. Yani bir fonksiyonun grafiğinde kopukluk varsa fonksiyon o noktada süreksizdir denilir.

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Türev**
ÜNİTE NO **11**
YAZAR **Prof.Dr. SEZGİN AKBULUT**

Türev Türev, sadece matematikte değil, aynı zamanda fizik, kimya, ekonomi, istatistik ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde de birçok problemin çözümünü kolaylaştıran önemli bir kavramdır. Önce türevin fiziksel olarak ne anlama geldiğini açıklayalım. Bir araç sabit bir hızla gidiyorsa, aldığı yolun S=hız x zaman olduğunu biliyoruz. Eğer aracın hızı sabit değilse o zaman aracın ortalama hızından bahsedilebilir. Örneğin bir araç 300 kilometrelik yolu 3 saatte gitmişse ortalama hızı 300/3=100 km/saat tir. Aracın t_1 anında aldığı yolun S_1 ve t_2 anında aldığı yolunda S_2 olduğu düşünülürse t_1

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Türev Uygulamaları**
ÜNİTE NO **12**
YAZAR **Prof.Dr. MURAT SUBAŞI**

BELİRSİZ HÂLLER

Bazı limit hesaplamalarında $0/0, \infty/\infty, \infty-\infty, 0\times\infty, 0^0, \infty^0$ ve 1^∞ durumları ile karşılaşılır. Bu ifadeler belirsiz hâller olarak adlandırılır. 0/0 Belirsizliği Bu belirsizlik L'Hôpital (Löpital) Kuralı ile giderilir. L'Hôpital Kuralı şöyledir. 0/0 Belirsizliği için L'Hôpital Kuralı: $f(x)$ ve $g(x)$, (a,b) aralığında türevlenebilen iki fonsiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Eğer $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ ve her $x\in(a,b)$ için $g'(x)\neq 0$ ise $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ olur. Bu kural $x\to\pm\infty$ için de geçerlidir. ∞/∞ Belirsizliği Bu belirsizlik türünde de L'Hôpital Kuralı ile sonuç kolayca elde edebilir. ∞/∞ Belirsizliği için L'Hôpital Kuralı: $f(x)$ ve $g(x)$, (a,b) aralığında türevlenebilen iki fonsiyon ve $x_0\in(a,b)$ olsun. Eğer $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ ve her $x\in(a,b)$ için $g'(x)\neq 0$ ise $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ olur. Bu kural $x\to\pm\infty$ için de geçerlidir. $\infty-\infty$ Belirsizliği Bu tür belirsizliklerde limiti hesaplanacak fonksiyon üzerinde bazı işlemler yapılarak verilen ifade 0/0 veya ∞/∞ belirsizliklerinden birine çevrildikten sonra L'Hopital Kuralı uygulayanarak sonucu elde edilir. $0\times\infty$ Belirsizliği $\lim_{x\to a} f(x)=0$ ve $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ ise $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ limitinde $0\times\infty$ şeklinde bir belirsizlik ile karşılaşılır. Bu durumda $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)}$ ya da $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)}$ şeklinde yazılarak 0/0 ya da ∞/∞ belirsizliklerinden birine geçilip L'Hopital Kuralı uygulanır. $0^0, \infty^0$ ve 1^∞ Belirsizlikleri Bu belirsizlikler $\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$ şeklindeki limitlerde karşımıza çıkar. Logaritmanın özelliklerinden faydalanılarak $(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x))^{g(x)}}=e^{g(x)\ln(f(x))}$ yazılabilir. $x\to x_0$ için limite geçilirse $\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln(f(x))}$ yazılır. Eğer $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x))=L$ limiti mevcutsa $\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln(f(x))}=e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x))}=e^L$ sonucu bulunur.

TEĞET VE NORMALİN DENKLEMİ

Teğetin Denklemi $y=f(x)$ fonksiyonu ile verilen bir eğri için bu eğrinin üzerindeki bir $A(x_0,y_0)$ noktasından çizilen teğet doğrunun denklemi $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ ile ifade edilir. Normalin Denklemi $y=f(x)$ fonksiyonu ile verilen bir eğriye üzerindeki bir $A(x_0,y_0)$ noktasından çizilen normal doğrunun denklemi $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ ile ifade edilir.

ARTAN-AZALAN FONKSİYONLAR

f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)>0$ ise f fonksiyonu artandır, Eğer $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)$ **FONKSİYONLARIN MAKSİMUMU VE MİNİMUMU**

Bir fonksiyonun türevini sıfır veya tanımsız yapan noktaya o fonksiyonun kritik noktası denir. Bir fonksiyonun extremum noktaları o fonksiyonun kritik noktaları arasında aranır. $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu verilsin ve c noktası da bu fonksiyonun tanımlı olduğu bir kritik noktası olsun. Bu noktada türevin işareti pozitiften negatife dönüyorsa bu nokta bir yerel maksimum noktadır. Bu noktada türevin işareti negatiften pozitife dönüyorsa bu nokta bir yerel minimum noktadır. Bu noktada türevin işareti değişmiyorsa bu nokta bir extremum nokta değildir.

BÜKÜM NOKTALARI

f fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu aralıkta f' türevi artan ise f fonksiyonuna yukarı bükey ya da konveks, f' türevi azalan ise f fonksiyonuna aşağı bükey ya da konkav denir. Konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçis noktasına da büküm noktası denir. Geometrik olarak, fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta, grafiği üzerinde çizilecek bütün teğetler fonksiyon eğrisinin altında kalıyorsa fonksiyon bu aralıkta yukarı bükey(konveks) olur. Eğer teğetler fonksiyon eğrisinin üstünde kalıyorsa fonksiyon bu aralıkta aşağı bükey(konkav) olur.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Grafik Çizimi**
ÜNİTE NO **13**
YAZAR **Prof.Dr. MURAT SUBAŞI**

ASİMPTOTLAR

Asimptotlar, bir fonksiyonun grafiğini çizerken bize rehberlik edecek olan özel doğrular veya eğrilerdir. Asimptotlar kısaca, orijinden sonsuz uzaklaştığımızda bir eğriye teğet olan doğrular veya eğriler olarak ifade edilebilir. Dört tip asimptot vardır. Bunlar, Düşey Asimptot Yatay Asimptot Eğik Asimptot Eğri Asimptot şeklindedir. Asimptotları geometrik olarak gösterirken, verilen fonksiyonun grafiği ile karışmaması için kesikli çizgiler kullanılır. Şimdi bu dört asimptotu sırayla inceleyelim. Düşey Asimptot $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$ veya $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$ oluyorsa $x=x_0$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir. Yatay Asimptot $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $\lim_{x\to+\infty} f(x)=k$ ve(veya) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=k$ oluyorsa $y=k$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotu denir. $P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom fonksiyon olmak üzere $f(x)=P(x)/Q(x)$ olsun. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesine eşit ise en yüksek dereceli terimlerin katsayılarının oranı yatay asimptotu verir. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden küçük ise $y=0$ doğrusu yatay asimptottur. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden büyük ise yatay asimptot yoktur. Eğik Asimptot $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x=a\,(a\neq 0)$ ve $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=b$ olacak şekilde a ve b reel sayıları varsa $y=ax+b$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun eğik asimptotu denir. Burada $x\to-\infty$ durumu için de benzer tanım söz konusudur. $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ şeklindeki köklü fonksiyonlarda a0 ise $y=\sqrt{a}\,|x+b/2a|$ eğik asimptottur. $P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom fonksiyon olmak üzere $f(x)=P(x)/Q(x)$ olsun. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden bir fazla ise $f(x)$ fonksiyonunun eğik asimptotu vardır. Polinom bölmesi yapılarak eğik asimptot bulunur. Eğri Asimptot $P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom fonksiyon olmak üzere $f(x)=P(x)/Q(x)$ olsun. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden en az iki fazla ise eğri asimptot vardır. Polinom bölmesi yapılarak $f(x)=B(x)+K(x)/Q(x)$ şeklinde yazılır. Bu durumda ise $y=B(x)$ fonksiyonu eğri asimptotu verir.

GRAFİK ÇİZİMİ

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir. Fonksiyonun tanım kümesi belirlenir. Fonksiyonun (varsa) eksenleri kestiği noktalar bulunur. Fonksiyonun varsa asimptotları bulunur. Fonksiyonun birinci türevi alınarak işareti incelenir. Fonksiyonun ikinci türevi alınarak işareti incelenir (Bazen işlemlerin çok uzamaması için bu kısmı ihmal edebiliyoruz). Elde edilen veriler kullanılarak fonksiyon için değişim tablosu oluşturulur. $x\to\pm\infty$ için grafik yatay, eğik ya da eğri asimptot ile birlikte hareket eder. Tabloda x değerleri küçükten büyüğe doğru yazılır. Türevin işareti incelenirken 5. Bölümde yer alan Tablo 5.1, Tablo 5.2, Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 göz önünde bulundurulur. Tabloda düşey asimptotlara çift çizgi çekilir ve her çizginin ucuna birer ∞ yazılır. Soldaki sonsuzun işareti çizginin solundaki türevin işareti ile aynı, sağdaki sonsuzun işareti çizginin sağındaki türevin işareti ile ters olur. Değişim tablosundaki bilgiler koordinat sistemine aktarılır.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

DERS ADI **Matematik I**
ÜNİTE ADI **Maksimum ve Minimum Problemleri (Optimizasyon)**
ÜNİTE NO **14**
YAZAR **Prof.Dr. ABDULLAH KOPUZLU**

Optimizasyon, bir sistemdeki kaynakların (işgücü, zaman, kapital, süreçler, hammaddeler, kapasite, ekipman gibi) en verimli şekilde kullanılarak belirli amaçlara (maliyet enazaltılması, kâr ençoklanması, kapasite kullanımının enyükseltilmesi ve verimliliğin ençoklanması gibi) ulaşmayı sağlayan bir teknoloji olarak tanımlanmaktadır. Asırlar öncesine dayanan ve yaklaşık çözümleri 300 yıl önce formel yapıya kavuşan maksimum ve minimum problemleri (optimizayon problemleri) genel olarak tanıtıldı. Optimizasyonda modelleme ve çözümleme iki önemli bileşen olarak nitelendirilmektedir. Modelleme gerçek yaşamda karşılaşılan problemin matematiksel olarak ifade edilmesi; çözümleme ise bu modeli sağlayan en iyi çözümün elde edilmesini kapsamaktadır. Problemlerin çözüm yolu bir kavram ağı ile oluşturuldu. Bir Maksimum ve minimum probleminde (optimizasyon probleminde) ve planlamada genel olarak aşağıdaki adımlar göz önüne alındı: Problemi tanımak Problemi tanımlamak Problem için bir model oluşturmak Modeli çözmek Çözümü onaylamak Çözümü uygulamak Optimizasyon probleminin (maksimum ve minimum problemi) çözümü için aşağıdaki yol uygulandı: Maksimum veya minimum olması istenen çokluğun fonksiyonu oluşturulur (problemin matematiksel modeli). Eğer oluşturulan fonksiyon birden fazla değişken içeriyorsa, verilen şartlar veya kısıtlamalar kullanılarak bu fonksiyon tek değişkene indirgenir. Elde edilen tek değişkenli fonksiyonun türevi alınarak kritik değer veya değerler bulunur. Bulunan bu kritik değer veya değerlerin maksimum veya minimum olup olmadığı türev tablosu ile gösterilir. İlk olarak bazı basit örneklerle maksimum ve minimum problemleri tanıtılıp çözümleri bulundu. Daha sonra iş ve iktisatla ilgili bazı problemleri tanıtılıp, bu problemlerin çözümleri bulundu. Bir örneği seçerek verilen problemi adım adım çözmeye çalışalım. Çevresi 200 cm olan dikdörtgenler arasında alanı maksimum olanının kenar uzunluklarını bulmamız istensin. Dikdötgenin kenar uzunlukları x ve y olarak alındığını göz önüne alalım. Dikdötgenin tüm kenarların uzunlukları toplamı 200 cm olarak verilmiştir. O hâlde elimizde olan veri, 2x+2y=200 yada bu denklemin her iki tarafı 2 ile sadeleştirilirse x+y=100 denklemidir. Maksimum olması istenen ise, dikdörtgenin alanıdır. Bir dikdörtgenin alanı kısa ve uzun kenarlarının çarpımı olarak formüle edilir. Yani, A=x.y dir. İşte bu eşitlik (fonksiyon) problemin matematiksel modellemesidir. Ancak bu alan fonksiyonu iki değişken içermektedir. Dolayısı ile fonksiyonu tek değişkenli yapmak zorundayız. Bunun için izlememiz gereken yol problemin sunumunda verilen veri yada verilerden yararlanmak olacaktır. Dikdörtgenin çevre uzunluğunun verildiğini biliyoruz. O hâlde yukardaki x+y=100 eşitliğinden yararlanmalıyız. Bu eşitlikten hareketle, y değişkeni x değişkeni cinsinden y=100-x şeklinde yazılabilir. y nin bu değeri A alan formülünde yerine yazılırsa, A=x.(100-x) =100x-x^2 eşitliği bulunur. Görüldüğü gibi fonksiyon tek değişkenli (x değişkenine bağlı) hâle getirilmiş oldu. Şimdi problemin çözümünün ikinci adımına geçelim. Bu adımda yukardaki son eşitliğin her iki yanının türevini alalım. Bu durumda, A^'=100-2x elde edilir. Üçüncü adımda ise kritik değeri bulmalıyız. Bunun için son türev eşitliğini sıfıra eşitleyerek, bu eşitliği sağlayan x kritik değeri bulalım. Burada, A^'=100-2x=0□100=2x□x=50 kritik değeri bulunur. 50 kritik değeri türev tablosunda yerine yazıldıktan sonra, bu değerin sağında ve solunda türevin işareti incelenir. Böylece aşağıdaki türev tablosu elde edilir. x 50 A' + + + + - - - A □ □Kritik değer olan 50 nin çok yakın komşuluğunda fonksiyon, artanlıktan azalanlığa geçtiğinden, bu kritik değerde bir maksimum olduğu görülür. Yani dikdörtgeni alanının maksimum olması için x kenar uzunluğunun 50 olması gerekir. Diğer kenar uzunluğu olan y ise, y=100-x eşitliğinde x yerine 50 yazılarak bulunur. Yani y=100-50=50 olur.