DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Belirsiz İntegral**
ÜNİTE NO **1**
YAZAR **Prof.Dr. TAMER UĞUR**

Belirsiz İntegral
Bu ünitede Belirsiz İntegral kavramına geniş bir çerçeveden giriş yapılarak integralin matematikte neden ortaya çıktığı ve nasıl geliştiği anlatılır; integral fikrinin kökeninin M.Ö. 1800'lü yıllara kadar uzandığı, özellikle alan ve hacim hesaplama gereksinimlerinden doğduğu vurgulanır ve bu süreçte Eudoxus'un bilinen geometrik şekiller yardımıyla kesik piramit benzeri cisimlerin hacimlerini hesaplaması, ardından Arşimet'in benzer yöntemlerle eğri altında kalan bölgelerin alanlarını bulması gibi tarihsel katkılar örnek verilir; integralin modern anlamda ise Newton'un (1665) ve Leibniz'in (1675) çalışmalarıyla gerçek kimliğine kavuştuğu belirtilerek Leibniz'in "toplam" anlamındaki *Summa/Sum* kelimesinden esinlenip günümüzde kullandığımız integral sembolünü literatüre kazandırdığı ifade edilir.

Diferansiyel
Tarihsel girişin ardından ünitenin temel hedeflerine uygun biçimde öğrencinin belirsiz integrali daha iyi kavrayabilmesi için önce diferansiyel kavramı ele alınır ve diferansiyelin türevle çok yakın ilişkili olduğu açıklanır: $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde x bağımsız, y bağımlı değişken kabul edilerek x teki küçük bir artmanın $\Delta x = dx$ olarak alınabileceği, buna bağlı olarak y deki değişmenin $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ biçiminde ifade edildiği gösterilir; fonksiyon sürekli ve türevlenebilir olduğunda diferansiyelin $dy = f'(x)\, dx$ ile tanımlandığı ve burada dy nin x ve dx'e bağlı olduğu anlatılır. Bu noktada ünite, Δy ile dy arasındaki farkı netleştirir: Δy eğri boyunca gerçekleşen gerçek değişimi temsil ederken dy teğet doğrusu üzerinde meydana gelen yaklaşık değişimi temsil eder ve bu iki değer özellikle dx küçük olduğunda birbirine oldukça yakın olur; bu geometrik yorum sayfa üzerindeki grafikle desteklenir ve diferansiyelin yalnızca soyut bir tanım olmadığı, aynı zamanda yaklaşık hesaplamalarda da kullanılabileceği örneklerle pekiştirilir. Diferansiyel kavramı tanıtıldıktan sonra ünite, asıl konu olan belirsiz integral ve bir fonksiyonun ilkeli (antitürevi) kavramına geçer; burada öğrencinin en kritik farkındalığı kazanması hedeflenir: aynı türevi veren pek çok farklı fonksiyon bulunabilir. Örneğin $y=x^2$ ile $y=x^2-1$ fonksiyonlarının türevi aynı şekilde $2x$ olduğundan, türevi $2x$ olan fonksiyonun yalnızca x^2 değil, x^2+c biçimindeki sonsuz sayıda fonksiyon olabileceği açıklanır ve bu durum belirsiz integralin neden "belirsiz" olarak adlandırıldığının temel sebebidir. Bu çerçevede tanım olarak, verilen bir $f(x)$ fonksiyonunu türev kabul eden $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$'in belirsiz integrali denildiği ve bu işlemin $f(x)\, dx=F(x)+c$ şeklinde gösterildiği öğretilir; burada integral işaretinin anlamı, c nin integral sabiti, dx teki x in integral değişkeni, $f(x)$ in ise integrand olduğu belirtilerek integral diline ait temel terimler kazandırılır. Ardından "belirsiz integral hesabı" bölümünde integral almanın, temelde türev alma işleminin tersi olduğu düşüncesi üzerinden ilerlenir; örneğin $\int 1\, dx=x+c, \int x\, dx=1/2\, x^2+c$ gibi en temel örnekler verilerek öğrenciye integralin mantığı sezdirilir ve daha karmaşık ifadelerde integral alma işleminin nasıl yürütüleceği adım adım gösterilir. Burada özellikle önemli bir özellik olarak, cebirsel toplamların integralinin terim terim alınabildiği vurgulanır; yani $\int (f(x)+g(x))\, dx=\int f(x)\, dx+\int g(x)\, dx$ ve $\int (f(x)-g(x))\, dx=\int f(x)\, dx-\int g(x)\, dx$ kuralları uygulanır; örneklerde sabit katsayıların integral dışına çıkarılabildiği ve her terimden ayrı ayrı bir sabit gelse bile bunların toplamının yine bir sabit olacağı için sonuçta tek bir c ile yazılmasının yeterli olduğu hatırlatılır. Sonraki kısımda en çok kullanılan fonksiyonlar için Temel İntegral Formülleri bir liste halinde sunulur ve öğrencinin integral işlemini hızlı biçimde yapabilmesi amaçlanır: $\int dx=x+c \int \alpha dx= \alpha x+c$ (burada α sabit), gibi formüller hem tanıtılır hem de uygulanır. Bu formüller verildikten sonra ünite, birçok farklı tipte örnekle öğrencinin uygulama becerisini geliştirmeyi hedefler. Ünite boyunca örneklerin çözümleri sade, anlaşılır ve kontrol edilebilir biçimde verilir; gerektiğinde integral alma işleminin doğruluğu türevle test edilerek integral–türev ilişkisinin temel mantığı pekiştirilir. Son bölümde ise öğrencilere konuyu tekrar ettirecek şekilde kısa bir "özet" sunulup, integralin tarihsel gelişimi, diferansiyelin kısa tanıtımı, belirsiz integral tanımı ve temel integral formülleriyle bunların kullanımına dayalı örneklerin işlendiği hatırlatılır; ayrıca öğrencinin pekiştirmesi için değerlendirme soruları (çoktan seçmeli test) verilir ve cevap anahtarıyla kendi kendine kontrol yapması sağlanır, böylece ünite hem temel kavramları kazandırmayı hem de bir sonraki adım olan belirli integral konusuna sağlam bir hazırlık yapmayı amaçlar.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **İntegral Hesaplama Metotları**
ÜNİTE NO **2**
YAZAR **Prof.Dr. TAMER UĞUR**

İNTEGRAL HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

Bu ünitede, belirsiz integral konusunun yalnızca temel integral formülleriyle sınırlı olmadığı, bazı integrallerin doğrudan “hazır” kurallarla çözülemeyeceği ve bu yüzden farklı integral hesaplama yöntemlerinin geliştirilmesi gerektiği vurgulanarak konuya giriş yapılır. Öncelikle integralin temel özellikleri hatırlatılır; özellikle toplam ve fark durumunda dağılım özelliği kullanılarak $\int(f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ ve $\int(f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ biçiminde işlem yapılabildiği belirtilir. Ancak ünitenin önemli mesajı, bu özelliğin çarpım ve bölüm için geçerli olmadığıdır; yani genel olarak $\int f(x)g(x)\,dx$, $(\int f(x)\,dx)(\int g(x)\,dx)$ değildir ve $\int f(x)/g(x)\,dx$ da $(\int f(x)\,dx)/(\int g(x)\,dx)$ biçiminde yazılamaz. Bu nedenle ünite, özellikle çarpımlı, bileşik, rasyonel ve daha karmaşık görünen integrallerde “doğru yöntemi seçme” becerisini kazandırmayı amaçlar. İlk yöntem olarak değişken değiştirme (yerine koyma) yöntemi ayrıntılı biçimde ele alınır ve bu yöntemin çoğunlukla bileşik fonksiyon biçimindeki integrallerde kullanıldığı gösterilir; örneğin $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ tipinde bir integralde $u = g(x)$ seçilerek $du = g'(x)\,dx$ yazılır ve integral $\int f(u)\,du$ şekline indirgenir, daha sonra bulunan sonuç u yerine tekrar $g(x)$ yazılarak x'e geri dönülür. Bu yöntem özellikle $(ax+b)$ türü ifadelerin kuvvetlerinde veya köklü ifadelerde büyük kolaylık sağlar; örneğin $\int (x+2)^5\,dx$ integralinde $u = x+2$ alınırsa $du = dx$ olur ve integral $\int u^5\,du = u^6/6 + C = (x+2)^6/6 + C$ bulunur. Benzer biçimde $\int (2x)/(x^2+1)\,dx$ integralinde $u = x^2+1$ seçildiğinde $du = 2x\,dx$ olur ve integral $\int (1/u)\,du = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$ sonucuna ulaşılır; böylece öğrenci, integrali kolaylaştıran en önemli adımın doğru “u seçimi” olduğunu fark eder. Ünitenin ikinci temel yöntemi kısmi integrasyon (parçalı integrasyon) yöntemidir ve özellikle iki fonksiyonun çarpımı biçimindeki integrallerde kullanılır; burada amaç, integrali daha basit bir integral cinsinden ifade etmektir. Bu yöntemde temel formül $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ şeklinde verilir; burada $u = u(x)$ seçilip du hesaplanır, $dv = v'(x)\,dx$ seçilip v bulunur ve integral yeniden düzenlenerek çözülür. Örneğin $\int x e^x\,dx$ ifadesinde $u = x$ ve $dv = e^x\,dx$ seçilirse $du = dx$, $v = e^x$ olur ve sonuç $x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C$ şeklinde elde edilir; yine $\int x \sin(x)\,dx$ için $u = x$, $dv = \sin(x)\,dx$ seçildiğinde $v = -\cos(x)$ olur ve integral $-x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$ biçiminde bulunur. Ünite bu örnekler üzerinden, kısmi integrasyonda “hangi kısmı u seçmeliyim?” sorusunun çözüm başarısını etkilediğini vurgular; genellikle kolay türevlenen kısmın u, kolay integral alınan kısmın dv seçilmesi önerilir ve polinom-üstel, polinom-trigonometrik, logaritmalı ifadeler gibi pek çok tip soruda bu yöntemin temel araç olduğu anlatılır. Üçüncü ana başlık rasyonel fonksiyonların integrali ve basit kesirlere ayırma yöntemidir; bu bölümde rasyonel fonksiyon $p(x)/q(x)$ biçiminde tanıtılır ve payın derecesinin paydaya göre durumuna göre işlem yapılması gerektiği açıklanır. Eğer $\deg(p) < \deg(q)$ ise ifade uygun bir basit kesir düzenine sahiptir; fakat $\deg(p) \geq \deg(q)$ olduğunda önce polinom bölmesi yapılarak ifade “polinom + kalan rasyonel kısım” haline getirilir ve integral bu şekilde alınır. Daha sonra payda çarpanlarına ayrılabiliyorsa kesirler parçalanarak daha küçük integrallere dönüştürülür; örneğin $1/((x-1)(x+2))$ gibi ifadeler $A/(x-1) + B/(x+2)$ şeklinde ayrılır, katsayılar bulunur ve integral alınarak $\ln|x-1|$ ve $\ln|x+2|$ gibi sonuçlara ulaşılır. Ayrıca payda $(x-a)^2$ gibi tekrarlı lineer çarpan içeriyorsa $A/(x-a) + B/(x-a)^2$ biçiminde yazılması gerektiği, ikinci dereceden indirgenemeyen çarpanlar varsa $(ax+b)/(x^2+px+q)$ gibi biçimlerin kullanılacağı belirtilerek yöntemin mantığı öğretilir. Ünite boyunca bu yöntemlerin ortak amacı, integrali doğrudan zorlamak yerine uygun dönüşümlerle bilinen temel integral kalıplarına indirgeyerek çözmektir; yani karmaşık görünen bir integral, doğru strateji seçildiğinde temel formüllerle çözülebilecek hale gelir. Sonuç olarak bu ünite, öğrencinin “integral formülü ezberleme” düzeyinden çıkıp integralin yapısını analiz edebilen, hangi tip soruda hangi tekniğin uygulanacağını seçebilen ve işlemi sistemli şekilde yürütebilen bir düzeye ulaşmasını hedefler; böylece belirsiz integrallerde başarı artarken bir sonraki konular için de güçlü bir altyapı oluşturulur.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Belirli İntegral**
ÜNİTE NO **3**
YAZAR **Prof.Dr. ABDULLAH KOPUZLU**

Belirli İntegral

Matematik II dersinin bu ünitesi, kalkülüsün en temel taşlarından biri olan belirli integral konusunu kapsamlı bir şekilde ele almaktadır. Ünite, belirli integralin tanımıyla başlar.

Tanım: Bir $f(x)$ fonksiyonu bir $[a,b]$ aralığında sınırlı ve parçalı sürekli ise bu aralıkta belirli integrali vardır. Belirli integral,

$\int_a^b f(x)\,dx$

şeklinde gösterilir ve Riemann toplamının limitine dayanır.

Geometrik Anlam:

Belirli integral, $f(x)$ fonksiyon eğrisi, $x=a, x=b$ doğruları ve $x-$ ekseni arasında kalan bölgenin alanını verir (eğer bölge $x-$ ekseni altında kalıyorsa, bu alan

$A=-\int_a^b f(x)dx$

integrali ile hesaplanır.

Belirli İntegralin Temel Özellikleri

1. $\int_a^a f(x)dx=0$
2. Birden fazla fonksiyonun belirli integrali, bu fonksiyonların belirli integrallerinin toplamına eşittir. Yani
$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]\,dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx+\cdots+\int_a^b f_n(x)dx$
şeklindedir.
3. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$
4. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)\,dx,\ (k\in R)$. Bu sabit katsayı integral dışına atılabilir anlamındadır.

Belirli İntegralin Temel Teoremleri

1. Temel Teorem: $f(x)$ fonksiyonu bir $[a,b]$ aralığında sürekli ve a ise $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ olarak tanımlanan Fx fonksiyonu türevlenebilirdir ve $F'(x)=f(x)$dir.

2. Temel Teorem (En önemli kısım): f ve F fonksiyonları a,b aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere, eğer a,b aralığında sürekli ve $F'(x)=f(x)$ ise,

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

olur. Burada önce $f(x)dx$ belirsiz integrali, temel integrasyon formülleri ya da integral alma metotları ile hesaplanır. Sonrada elde edilen Fx ilkel fonksiyonunda üst ve alt sınırlarındaki değerleri $(Fb, F(a))$ bulunarak bunların farkı alınıp sonuç $(Fb-F(a))$ elde edilir.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **İntegralin Uygulamaları**
ÜNİTE NO **4**
YAZAR **Prof.Dr. ABDULLAH KOPUZLU**

Belirli ve belirsiz integralin uygulama alanlarından bazıları, alan hesapları ve iktisadi problemlerdir.

Belirsiz İntegralin İktisadi Uygulamaları:

1. Marjinal gelirden toplam gelirin bulunması.
2. Marjinal maliyetten toplam maliyetin bulunması.
3. Marjinal kârdan toplam kârın bulunması
4. Başlangıç şartlarından (üretim yokken gelir/kâr) integral sabitinin bulunması.
5. Talep fonksiyonunun bulunması. Burada x ürün miktarı, $R(x)$ toplam gelir fonksiyonu olmak üzere talep fonksiyonu, $P(x)=\frac{R(x)}{x}$ şeklindedir.

Belirli İntegral İle Alan Hesabı:

1. $f(x)$ fonksiyon eğrisi, $x=a, x=b$ doğruları ve $x-$ ekseni ile sınırlı bölgenin alanı;

a) Bölge $x-$ ekseni üstünde ise alan, (□x□(a,b) için $f(x)\geq 0$)

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

olur.

b) Bölge $x-$ ekseni altında ise alan, (□x□(a,b) için $f(x)\leq 0$)

$$A=-\int_a^b f(x)\,dx$$

olur.

2. $f(x)$ ve $g(x)$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanı arasındaki alanı, □x□(a,b) için $f(x)\geq g(x)$ ise, $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$ şeklinde bulunur. Burada a ve b (a, $fx=gx$ eşitliğini sağlayan noktalardır.

Belirli İntegralin İktisadi Uygulamaları:

1. **Denge noktası:** Arz ve Talep fonksiyon eğrilerinin kesim noktasıdır. Burada fx arz fonksiyonunu ve gx talep fonksiyonunu temsil etmek üzere denge noktası $fx=gx$ eşitliğini sağlayan noktadır.
2. **Tüketici rantı:** Tüketici bir ürünü denge fiyatı üzerinde bir fiyattan almaya razı iken denge fiyatından alırsa kâr etmiş sayılmaktadır. Bu kazanca, tüketici rantı denir. (x_0,p_0) denge noktası ve $f(x)$ talep fonksiyonu olmak üzere tüketici rantı,

$$TR=\int_0^{x_0}[f(x)-p_0]\,dx$$

3. **Üretici rantı:** Üretici bir ürünü denge fiyatı altında bir fiyattan satmaya razı iken denge fiyatından satarsa kâr etmiş olur. Bu kazanca üretici rantı denir. (x_0,p_0) denge noktası ve $f(x)$ arz fonksiyonu olmak üzere üretici rantı,

$$ÜR=\int_0^{x_0}[p_0-f(x)]\,dx$$

İntegrali ile hesaplanır.

Ünite boyunca bu konular çok sayıda örnek ve grafikle pekiştirilmiştir.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Çok Değişkenli Fonksiyonlar**
ÜNİTE NO **5**
YAZAR **Prof.Dr. HALİT ORHAN**

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR: KAVRAMLAR VE ANALİZ

Günlük hayatta karşılaşılan pek çok olay ve bilimsel araştırma konusu, genellikle tek bir değişkene değil, birden fazla bağımsız değişkene bağlıdır. Tek değişkenli fonksiyonlarda kullanılan temel analiz yöntemleri, çok değişkenli fonksiyonlara genişletildiğinde daha zengin ve karmaşık bir yapı ortaya çıkar. Bu fonksiyonlar; mühendislik, iktisat, istatistik ve akışkanlar dinamiği gibi geniş bir uygulama alanına sahiptir.

1. Çok Değişkenli Fonksiyonların Tanımı

Çoğu fonksiyon birden fazla bağımsız değişkene dayanır. Örneğin, bir silindirin hacmi ($V=\pi r^2 h$) hem yarıçapa hem de yüksekliğe bağlıdır. Benzer şekilde, yeryüzündeki bir noktanın sıcaklığı (T) o noktanın enlem (x) ve boylamına (y) göre değişir $(T(x,y)).$

Matematiksel Tanım: D, reel sayı çiftlerinden oluşan bir küme olsun. Eğer f, bu D kümesindeki her bir (x,y) noktasına tek bir $f(x,y)$ reel sayısı karşılık getiriyorsa, bu bağıntıya iki değişkenli fonksiyon denir. Bu durum $f: D \to \mathbb{R}$ şeklinde gösterilir. Benzer bir genişletme ile üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar da tanımlanabilir.

2. Tanım ve Görüntü Kümeleri

Çok değişkenli fonksiyonlarda tanım kümesi, fonksiyonun kuralını reel yapan tüm bağımsız değişkenlerin $(x, y, z...)$ oluşturduğu kümedir.

Logaritmik Fonksiyonlar: Logaritma fonksiyonu sadece pozitif sayılarda tanımlı olduğundan, $f(x,y) = \ln(x^2 + y - 1)$ gibi bir fonksiyonda tanım kümesi $x^2 + y - 1 > 0$ eşitsizliğini sağlayan noktalardır.

Köklü Fonksiyonlar: Çift dereceli köklerin içi negatif olamaz. Örneğin $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ fonksiyonu için $x^2 + y^2 \leq 1$ şartı aranır; bu da geometrik olarak koordinat düzleminde bir birim diski temsil eder.

3. Üç Boyutlu Uzayda Koordinat Sistemi ve Grafikler

İki değişkenli bir fonksiyonun grafiği $(z = f(x,y))$, üç boyutlu uzayda bir yüzey belirtir. Bu grafikler, tanım kümesindeki her (x,y) noktasına karşılık gelen z değerlerinin (üçüncü koordinat) birleşiminden oluşur.İki değişkenli fonksiyonların en basit grafik örneği düzlemlerdir. Birinci dereceden $z = Ax + By + C$ biçimindeki denklemler uzayda bir düzlem belirtir. Bir düzlemi çizmek için genellikle eksenleri kestiği noktalar (diğer iki değişkene sıfır verilerek) bulunur ve bu noktalar birleştirilir.

4. İktisadi ve Geometrik Uygulamalar

Çok değişkenli fonksiyonlar üretim, maliyet ve kar analizlerinde kritik rol oynar.

Üretim Fonksiyonları: Belirli miktardaki işgücü ve sermayeye bağlı üretim miktarı hesaplanabilir.

Maliyet ve Kar Fonksiyonları: Birden fazla ürün üreten bir firmanın toplam maliyeti $(C(x,y))$ veya toplam karı $(P(x,y)),$ bu ürünlerin miktarlarına bağlı olarak ifade edilir. Örneğin Kar (P), Gelir (R) ve Maliyet (C) farkından oluşur: $P(x,y) = R(x,y) - C(x,y).$

5. Önemli Hatırlatmalar ve Pratik Bilgiler

Tanımsızlık Durumları: Rasyonel bir fonksiyonda paydayı sıfır yapan noktalar tanım kümesinden çıkarılmalıdır.

Değer Hesaplama: Fonksiyonda belirli bir noktadaki değeri bulmak için, değişkenler yerine verilen sayılar yazılır. Örneğin $f(x,y) = x^2 y^3 - xy + 1$ için $f(1, -1)$ değeri 0 olarak bulunur.

Görselleştirme: Karmaşık yüzeylerin (hiperbolik paraboloidler gibi) grafiklerini çizmek zor olduğundan, günümüzde *Maple* veya *Mathematica* gibi bilgisayar programlarından yararlanılmaktadır.

Sonuç olarak, çok değişkenli fonksiyonlar tek değişkenli analizin doğal bir uzantısıdır; ancak değişkenler arası etkileşimler nedeniyle çok daha geniş bir analiz ve uygulama alanı sunarlar.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Kısmi Türevler ve Uygulamaları**
ÜNİTE NO **6**
YAZAR **Prof.Dr. HALİT ORHAN**

Kısmi Türev Kavramı ve İktisadi Mantığı

Matematiksel analizde tek değişkenli fonksiyonların türevi, bağımsız değişkendeki bir birimlik değişimin fonksiyon değerinde yarattığı değişimi ifade eder. Ancak gerçek dünya problemlerinde, özellikle iktisat ve işletme alanında, sonuçlar genellikle birden fazla faktöre bağlıdır. Örneğin, bir firmanın toplam maliyeti sadece tek bir ürünün üretim miktarına değil, hammadde fiyatlarına, işçilik saatlerine ve birden fazla ürün çeşidinin miktarına bağlıdır. İktisatçıların sıklıkla başvurduğu Ceteris paribus (diğer her şey sabitken) ilkesi, çok değişkenli bir sistemde tek bir faktörün etkisini izole etmeyi amaçlar. İşte bu mantığın matematiksel karşılığı kısmi türevdir. Kısmi türev sayesinde, bir değişkeni değiştirip diğerlerini sabit tutarak sistemin nasıl tepki vereceğini kesin olarak hesaplayabiliriz.

Kısmi Türevlerin Hesaplanması

$z = f(x, y)$ gibi iki değişkenli bir fonksiyon ele alındığında:

x'e Göre Kısmi Türev (f_x): Fonksiyonun x değişkenine göre değişimidir. Bu işlem yapılırken y değişkeni tıpkı bir sayı (5, 10 veya sabit a sayısı) gibi işlem görür. Limit tanımıyla bu durum, y sabitken x'teki sonsuz küçük değişimin fonksiyonun limit değerine oranıdır.

y'ye Göre Kısmi Türev (f_y): Benzer şekilde x değişkeni sabit tutulur ve fonksiyonun sadece y eksenindeki değişim hızı bulunur.Bu kurallar üç ve daha fazla değişkenli fonksiyonlar ($w = f(x, y, z)$) için de geçerlidir. Bir değişkene göre türev alınırken geri kalan tüm değişkenler sabit kabul edilir.

Geometrik Anlam ve Değişim Hızı

İki değişkenli bir fonksiyonun grafiği üç boyutlu uzayda bir yüzey belirtir. Bu yüzey üzerindeki bir noktada x yönündeki kısmi türev, yüzeyin o noktadaki x eksenine paralel teğetinin eğimidir. Benzer şekilde y yönündeki kısmi türev de y eksenine paralel teğetin eğimidir. Bu değerler aynı zamanda fonksiyonun o doğrultulardaki anlık değişim hızlarını temsil eder.

Yüksek Mertebeden Türevler ve Karışık Türevler

Bir fonksiyonun kısmi türevleri alındıktan sonra, elde edilen bu yeni fonksiyonların tekrar türevi alınabilir. Buna "ikinci mertebeden kısmi türevler" denir.

f_{xx}: Önce x'e sonra tekrar x'e göre türev.

f_{yy}: Önce y'e sonra tekrar y'e göre türev.

f_{xy} ve f_{yx}: Bunlar "karışık (çapraz) türevler"dir.

Karışık Türev Teoremi uyarınca, eğer bu türevler ilgili bölgede tanımlı ve sürekli ise, türev alma sırası sonucu değiştirmez $(f_{xy} = f_{yx}).$

Zincir Kuralı

Bazen bir fonksiyonun bağımsız değişkenleri de başka bir parametreye (örneğin zamana, t) bağlı olabilir. $z = f(x(t), y(t))$ durumunda, z'nin t'ye göre toplam değişimi bulunurken zincir kuralı uygulanır: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$ Bu formül, her bir yolun (değişkenin) fonksiyon üzerindeki etkisinin toplanması prensibine dayanır.

Optimizasyon: Maksimum, Minimum ve Kritik Noktalar

Çok değişkenli fonksiyonlarda en büyük (maksimum) veya en küçük (minimum) değerleri bulma işlemi optimizasyon olarak adlandırılır. Süreç şu adımları izler:

Kritik Noktaların Bulunması: Fonksiyonun birinci mertebeden tüm kısmi türevleri (f_x ve f_y) sıfıra eşitlenir ve elde edilen denklem sistemi çözülerek (x_0, y_0) noktaları bulunur.

İkinci Türev Testi (D Testi): Bulunan kritik noktaların türünü anlamak için $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ değeri hesaplanır.

$D > 0$ ve $f_{xx} > 0$ ise bu nokta bir yerel minimum noktasıdır.

$D > 0$ ve $f_{xx} < 0$ ise bu nokta bir yerel maksimum noktasıdır.

$D < 0$ ise bu nokta ne maksimum ne de minimumdur; bir eyer (semer) noktası olarak adlandırılır.

Lagrange Çarpanları Metodu (Kısıtlı Optimizasyon)

Gerçek hayatta kaynaklar sınırlıdır; bu nedenle optimizasyon problemleri genellikle bir yan şartla (kısıtla) birlikte gelir (Örn: Sabit bütçe ile faydayı maksimize etmek). Joseph Louis Lagrange tarafından geliştirilen bu metod, kısıtlı problemleri çözmek için en etkili yoldur. $g(x,y)=0$ kısıtı altında $f(x,y)$ fonksiyonunu optimize etmek için $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ şeklinde yeni bir "Lagrange Fonksiyonu" kurulur. Bu fonksiyonun tüm değişkenlere (x, y, λ)

göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde, kısıtı sağlayan en iyi çözüm noktası elde edilir.

İktisadi Uygulamalar

Kısmi türevler işletme ve iktisat matematiğinin temelidir. Marjinal Maliyet, bir değişken (üretim miktarı) bir birim artarken toplam maliyetin ne kadar değiştiğini ifade eden kısmi türevdir. Çok ürünlü bir firmada, sadece bir ürünün üretimindeki artışın maliyete etkisi bu yolla hesaplanır. Benzer şekilde rüzgar hızı gibi dış etkenlerin hissedilen sıcaklık üzerindeki etkileri de kısmi türevler aracılığıyla analiz edilerek değişkenlerin hangisinin sonuç üzerinde daha baskın olduğu belirlenebilir.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Matrisler**
ÜNİTE NO **7**
YAZAR **Prof.Dr. İNCİ GÜLTEKİN**

GİRİŞ

Matrisler ünitesi, matematiksel analiz ve uygulamalı bilimlerin temel taşlarından biri olan matris cebirini kapsamlı bir şekilde incelemektedir. Matris cebiri, ilk olarak 1857 yılında Arthur Cayley tarafından sistematik bir yapıya kavuşturulmuş olup, günümüzde mühendislikten ekonomiye, istatistikten bilgisayar bilimlerine kadar pek çok alanda karmaşık veri setlerini düzenlemek, analiz etmek ve işlemek için vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir. Ünitenin giriş bölümünde, matrislerin günlük hayattaki pratik uygulamalarına örnekler verilerek (örneğin, okullardaki ders programlarının hazırlanması, öğrenci not takibi, elektronik devre hesaplamaları ve muhasebe işlemleri) konunun önemi vurgulanmıştır. Reel sayılar cebiri ile matris cebiri arasındaki benzerlikler (toplama ve skalerle çarpma gibi eleman bazında işlemler) ve önemli farklılıklar (özellikle çarpma işleminin değişme özelliği taşımaması) da başlangıçta belirtilmiştir.

MATRİSİN TANIMI

Ünitenin ilk bölümü, matrisin tanımına odaklanmaktadır. Matris, reel veya karmaşık sayılardan oluşan, m satır ve n sütuna yerleştirilmiş dikdörtgen şeklindeki bir sayı tablosudur. Bu yapı, $A=[a_{ij}]_{mxn}$ = veya $A=(a_{ij})_{mxn}$ şeklinde gösterilir; burada a_{ij}, matrisin i. satır ve j. sütunundaki elemanını ifade eder. Bir matrisin büyüklüğü veya tipi, satır ve sütun sayılarının çarpımı (m x n) ile tanımlanır. Matrislerin satırları satır vektörleri, sütunları ise sütun vektörleri olarak adlandırılır. Bu temel tanım, matris cebirinin tüm diğer kavramları için bir başlangıç noktası oluşturur.

BAZI ÖZEL MATRİSLER

Ardından, matrislerin özel türleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Sıfır matrisi, tüm elemanları sıfır olan herhangi bir boyuttaki matristir ve toplama işlemine göre birim eleman görevi görür. Kare matris, satır ve sütun sayıları eşit olan (n x n) matrislere denir ve bu matrislerde esas köşegen kavramı büyük önem taşır. Birim matris I_n, esas köşegen üzerindeki elemanları 1, diğer tüm elemanları 0 olan özel bir kare matristir ve matris çarpımında birim eleman işlevi görür. Köşegen matris, esas köşegen dışındaki tüm elemanları sıfır olan bir kare matristir. Skaler matris, köşegen üzerindeki elemanları aynı olan bir köşegen matristir. Üçgen matrisler ise, esas köşegenin altındaki (üst üçgen matris) veya üstündeki (alt üçgen matris) tüm elemanları sıfır olan kare matrislerdir. Bu özel matrisler, matris cebirindeki birçok teoremin ve uygulamanın temelini oluşturur.

MATRİS İŞLEMLERİ

Matrisler üzerindeki işlemler de ayrıntılı olarak açıklanmıştır. İki matrisin eşit olabilmesi için aynı tipte olmaları ve karşılıklı elemanlarının birebir aynı değerlere sahip olması gerekir. Matrislerde toplama ve çıkarma işlemleri, ancak aynı tipteki matrisler arasında ve karşılıklı elemanların toplanması veya çıkarılmasıyla yapılabilir. Toplama işlemi, reel sayılardaki toplama gibi kapalılık, değişme, birleşme özelliklerine sahiptir; sıfır matris toplama işlemine göre birim elemandır ve her matrisin toplama işlemine göre bir tersi (-A) bulunur. Bir skaler (sayı) ile matrisin çarpımı, skalerin matrisin her bir elemanıyla çarpılmasıyla gerçekleştirilir.

İKİ MATRİSİN ÇARPIMI

İki matrisin çarpımı, matris cebirinin en kritik ve karmaşık işlemlerinden biridir. A matrisinin sütun sayısı ile B matrisinin satır sayısı eşit olduğunda ($A=(a_{ij})_{mxn}$ ve $B=(b)_{nxp}$), A.B çarpımı tanımlanabilir ve sonuç matrisi $C=(c_{ij})_{mxp}$ tipinde olur. Çarpım matrisinin c_{ij} elemanı, A matrisinin i. satırı ile B matrisinin j. sütunundaki elemanların karşılıklı çarpımlarının toplamı olarak hesaplanır. Matris çarpımının en önemli özelliği, genel olarak değişme özelliğinin olmamasıdır ($A.B \neq B.A$). Ancak birleşme özelliği ($A.(B.C) = (A.B).C$) ve çarpımın toplama üzerine dağılma özelliği ($A.(B+C) = A.B + A.C$) geçerlidir. Birim matris In, çarpma işlemine göre birim elemandır ($A.I_n = I_n.A = A$). Reel sayı çarpımından farklı olarak, A.B = 0 olmasına rağmen A ve B matrislerinin sıfır matris olmaması mümkündür; ayrıca A.B = A.C eşitliğinden B = C sonucuna ulaşılamayabilir, yani sıfır olmayan bir çarpanla sadeleştirme her zaman geçerli değildir. Bu farklılıklar, matris cebirinin kendine özgü yapısını ortaya koyar.

BİR MATRİSİN DEVRİĞİ (TRANSPOZU)

Bir matrisin devriği (transpozu), matrisin satırlarının sütun, sütunlarının ise satır olarak yeniden düzenlenmesiyle elde edilen yeni matristir ve A^T ile gösterilir. Eğer A matrisi m x n tipindeyse, A^T matrisi n x m tipinde olur. Transpoz alma işleminin temel özellikleri arasında (($(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T+ B^T$, .($(kA)^T= k.(A^T)$ ve $(A.B)^T= B^T. A^T$ bulunur. Bu özellikler, matris denklemlerini çözerken veya matrislerin yapısal özelliklerini incelerken önemlidir. Ayrıca, transpozu kendisine eşit olan kare matrislere simetrik matris ($A^T = A$), transpozu kendisinin eksi işaretlisine eşit olan kare matrislere ise ters simetrik matris ($A^T= -A$) denir.

BİR MATRİSİN TERSİ

Ünitenin son bölümü, bir matrisin tersi kavramına ayrılmıştır. Kare bir A matrisi için, $A.B = B.A= I_n$ (I_n, n. mertebeden birim matris) eşitliğini sağlayan n x n tipindeki B matrisine A matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. Her kare matrisin tersi mevcut olmayabilir. Özellikle 2 x 2 tipindeki bir matris \(A= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \end{bmatrix}\) için ters matris, \(A^{-1}=\frac{1}{(a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21})} \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \\ \end{bmatrix}^{}\) formülüyle hesaplanabilir; burada \((a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\) ifadesinin sıfırdan farklı olması, ters matrisin varlığı için kritik bir koşuldur. Ters matrisin de $(A^{-1})^{-1}=A$, $(A.B)^{-1}=(B)^{-1}(A)^{-1}$, $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ ve $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$ =gibi önemli özellikleri bulunmaktadır. Ters matrisler, lineer denklem sistemlerinin çözümünde ve matris denklemlerinin manipülasyonunda temel bir rol oynar. Bu ünite, matrislerin tanımından özel türlerine, temel işlemlerinden transpoz ve ters matris kavramlarına kadar geniş bir yelpazede bilgi sunarak, matris cebirine sağlam bir giriş yapmaktadır.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Determinantlar**
ÜNİTE NO **8**
YAZAR **Dr.Öğr.Üyesi FATMA SAĞSÖZ**

DETERMINANTLAR VE KARE MATRİSLERİN ANALİZİ

Matematikte ve özellikle doğrusal cebirde determinantlar, kare matrislerin karakteristik özelliklerini sayısal bir değerle ifade eden en kritik araçlardan biridir. Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünden, bir matrisin tersinin olup olmadığının belirlenmesine; geometrik alan ve hacim hesaplamalarından, vektörlerin lineer bağımsızlık analizine kadar geniş bir yelpazede kullanılır.

1. Determinant Kavramı ve Tanımı

Determinant, yalnızca kare matrisler (satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrisler) için tanımlanmış bir fonksiyondir. Her kare matrisi bir reel sayıya eşler. A bir kare matris ise, bu matrisin determinantı $det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir. Unutulmamalıdır ki determinantın sonucu bir matris değil, tek bir gerçel sayıdır. Eğer bir matris kare matris değilse, onun determinantından söz edilemez.

2. Düşük Boyutlu Matrislerde Determinant Hesabı

Matrisin boyutu arttıkça hesaplama yöntemleri de değişir:

- **1x1 Tipindeki Matrisler:** $A = [a]$ ise $|A| = a$ olur.
- **2x2 Tipindeki Matrisler:** En temel hesaplama yöntemidir. Esas köşegen (soldan sağa aşağı) üzerindeki elemanların çarpımından, yedek köşegen (sağdan sola aşağı) üzerindeki elemanların çarpımı çıkarılır.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ için $|A| = (a \cdot d) - (b \cdot c)$

- **3x3 Tipindeki Matrisler (Sarrus Kuralı):** Fransız matematikçi Pierre Sarrus tarafından geliştirilen bu yöntemde, matrisin ilk iki satırı (veya ilk iki sütunu) matrisin altına (veya yanına) aynen yazılır. Ardından oluşturulan üçerli sağa yatık köşegenlerin çarpımları toplanır ve bu toplamdan sola yatık köşegenlerin çarpımlarının toplamı çıkarılır.

3. Minör ve Kofaktör (Eş Çarpan)

Daha yüksek mertebeden matrislerin (4x4 ve üzeri) determinantını hesaplamak için matrisi alt matrislere indirgeyen kavramlar kullanılır:

Minör (M_{ij}): Bir matrisin i. satırı ve j. sütunu tamamen silindiğinde geriye kalan alt matrisin determinantıdır.

Kofaktör (A_{ij}): İlgili minörün, bulunduğu konuma göre bir işaret katsayısı ile çarpılmış halidir. İşaret, $(-1)^{i+j}$ formülüyle belirlenir. Eğer satır ve sütun numaralarının toplamı çift ise minörün işareti değişmez; tek ise minörün işareti tersine döner.

4. Laplace (Kofaktör) Açılımı

Herhangi bir boyuttaki kare matrisin determinantını hesaplamak için kullanılan genel yöntemdir. Bu yönteme göre; bir matrisin determinantı, herhangi bir satırın (veya sütunun) elemanları ile o elemanlara ait kofaktörlerin çarpımlarının toplamına eşittir. Hesaplama kolaylığı açısından, içinde en çok "0" (sıfır) bulunan satır veya sütunu seçmek işlem yükünü büyük ölçüde azaltır.

5. Determinantların Temel Özellikleri

Determinant hesaplamalarını hızlandıran ve teorik çıkarımlar sağlayan başlıca özellikler şunlardır:

- **Sıfır Elemanlı Satır/Sütun:** Bir matrisin bir satırı veya sütunu tamamen sıfırlardan oluşuyorsa, determinantı 0 olur.
- **Transpoze:** Bir matrisin satırları ile sütunları yer değiştirirse (transpozesi alınırsa) determinant değeri değişmez: $det(A) = det(A^T)$.
- **Satır Değiştirme:** İki satır veya iki sütun kendi arasında yer değiştirirse determinantın işareti değişir.
- **Özdeş/Orantılı Satırlar:** İki satırı veya sütunu aynı olan veya birbirinin katı (orantılı) olan matrislerin determinantı 0'dır.
- **Skaler Çarpım:** Bir matrisin bir satırı k sayısı ile çarpılırsa, determinant da k ile çarpılmış olur.
- **Üçgensel Matrisler:** Köşegeninin altındaki veya üstündeki tüm elemanları sıfır olan (üst veya alt üçgensel) matrislerin determinantı, sadece esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

6. Ek (Adjoint) Matris ve Matris Tersi

Matrislerin tersini bulmada kullanılan en önemli yöntemlerden biri determinant temellidir:

Ek Matris ($adj(A)$): Bir matrisin her bir elemanının yerine kendi kofaktörü yazılarak elde edilen

kofaktörler matrisinin transpozesidir (devriğidir).
Ters Matris (A^{-1}): Bir matrisin tersi, ek matrisinin determinantına bölünmesiyle bulunur:
$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$
Burada hayati kural şudur: Eğer bir matrisin determinantı sıfır ise ($|A|=0$), o matrisin tersi yoktur. Bu tür matrislere "Tekil (Singular) Matris" denir.

7. Uygulamalar: Cramer Kuralı

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde determinantlar büyük kolaylık sağlar. Cramer Kuralı'na göre, her bir değişkenin değeri, değişkenin katsayılar sütunuyla sonuçlar sütununun yer değiştirildiği yeni matrisin determinantının, katsayılar matrisinin determinantına bölünmesiyle bulunur ($x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$). Bu kuralın uygulanabilmesi için sistemin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.
Sonuç olarak, determinantlar sadece sayısal bir sonuç değil, bir matrisin doğrusal dönüşümdeki davranışını, tersinirliğini ve geometrik etkisini anlamamızı sağlayan, lineer cebirin kalbinde yer alan bir kavramdır.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Lineer Denklem Sistemleri**
ÜNİTE NO **9**
YAZAR **Doç.Dr. YEŞİM AKBULUT**

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

Lineer denklem sistemleri, matematiksel modellemenin temel taşlarından biridir ve ekonomi, işletme, mühendislik ve sosyal bilimler gibi geniş bir yelpazedeki disiplinlerde karşılaşılan karmaşık problemlerin analizinde ve çözümünde kritik bir rol oynar. Bu ünite, lineer denklem sistemlerini açıklamakta, aynı zamanda bu sistemlerin çözüm varlığını tartışmakta ve çeşitli çözüm yöntemlerini detaylandırmaktadır.

Ünite, ilk olarak iki bilinmeyenli lineer denklem sistemlerini ele alarak konuya giriş yapar. Tek bir lineer denklem, örneğin $ax+by=c$ formundaki bir ifade, reel sayılar düzleminde bir doğruyu temsil eder. Bu denklemi sağlayan (x,y) ikilileri sonsuz sayıdadır ve bu doğru üzerindeki her nokta bir çözümdür. Ancak, iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi, iki doğrunun birlikte incelenmesini gerektirir. Sistemin çözümü, her iki denklemi de aynı anda sağlayan (x,y) ikilisidir ve geometrik olarak bu iki doğrunun kesişim noktasıdır. $ax+by=c$ ve $dx+ey=f$ doğruları arasındaki ilişkiye bağlı olarak üç farklı çözüm durumu ortaya çıkar:

1. **Tek Çözüm:** Doğrular tek bir noktada kesişir. Bu durum, katsayılar oranının farklı olmasıyla $(a/d \neq b/e)$ karakterize edilir.
2. **Çözüm Yok:** Doğrular paraleldir ve asla kesişmezler. Bu durum, katsayılar oranının eşit ancak sabit terim oranının farklı olmasıyla $(a/d = b/e \neq c/f)$ belirlenir.
3. **Sonsuz Çözüm:** Doğrular çakışıktır, yani aslında aynı doğrudurlar. Bu durum, tüm katsayılar ve sabit terim oranlarının eşit olmasıyla $(a/d = b/e = c/f)$ ifade edilir.

İki bilinmeyenli lineer denklem sistemleri genellikle yok etme yöntemi ile çözülür; bu yöntemde bir bilinmeyenin katsayıları eşit büyüklükte ve zıt işaretli olacak biçimde düzenlenir, ardından denklemler taraf tarafa toplanarak tek bilinmeyenli bir denklem elde edilir.

Ünite daha sonra n-bilinmeyenli lineer denklem sistemlerine geçiş yapar. Genel bir n-bilinmeyenli lineer denklem, $a_1x_1 +a_2x_2 ... + a_nx_n = b_1$ şeklinde yazılır. Bu tür denklemlerden birden fazlasının bir araya gelmesiyle n-bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi oluşur:

Eğer sistemdeki tüm sabit terimler $(b_i, i=1,2\ldots,m)$ sıfır ise, sisteme "homojen lineer denklem sistemi" denir. Homojen denklem sistemleri, daima $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ olan ve "aşikar çözüm" olarak adlandırılan çözüme sahiptir, bu nedenle homojen denklem sistemleri daima tutarlıdırlar. Aşikar çözüm dışında elde edilen çözümler ise "aşikar olmayan çözümler" olarak adlandırılır.

Genel lineer denklem sistemleri için de üç olası durum söz konusudur: sistemin tek bir çözüme sahip olması, çözümün olmaması veya sonsuz çözüme sahip olması. Çözümü sahip olan sistemlere "tutarlı", çözümü olmayan sistemlere ise "tutarsız" denir.

Lineer denklem sistemlerini çözmek için en yaygın ve güçlü yöntemlerden biri "Gauss yok etme yöntemi"dir. Bu yöntemin temelinde, sistemin çözüm kümesini değiştirmeyen elementer işlemler bulunur:

1. İki denklemin yerini değiştirmek.
2. Bir denklemi sıfırdan farklı bir sayıyla çarpmak.
3. Bir denklemin sıfırdan farklı bir katını başka bir denkleme eklemek.

Bu işlemler ardışık olarak uygulanarak sistem "basamak (eşelon) formuna" dönüştürülür. Basamak formundaki bir sistemde, her denklemin ilk bilinmeyeni, bir önceki denklemin ilk bilinmeyeninden daha sağda yer alır ve aşağıya doğru bilinmeyen sayısı azalır. Basamak formuna dönüştürüldükten sonra, sistemin çözümü aşağıdaki kurallara göre yorumlanır:

* Eğer basamak formunda k, sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere $0=k$ gibi bir çelişki ortaya çıkarsa, sistem tutarsızdır ve çözümü yoktur.
* Eğer sistem tutarsız değilse ve bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşitse, sistemin tek çözümü vardır.
* Eğer sistem tutarsız değilse ve bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazlaysa, sistemin parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır. Parametre sayısı, bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı arasındaki farka eşittir. Bu durumda, serbest değişkenler parametre olarak atanır ve diğer değişkenler bu parametreler cinsinden ifade edilir.
* Özel bir durum olarak, denklem sayısının bilinmeyen sayısından fazla olduğu $(m>n)$ durumlarda, bilinmeyen sayısı kadar denklem seçilip çözülür ve bulunan çözümün diğer denklemleri sağlayıp

sağlamadığı kontrol edilir. Bulunan çözüm, diğer denklemleri sağlamıyorsa sistem tutarsızdır.
Lineer denklem sistemlerinin matrisler aracılığıyla gösterimi, çözüm süreçlerini daha sistematik ve kompakt hale getirir. Bir n-bilinmeyenli m-denklemden oluşan lineer denklem sistemi $AX=B$ şeklinde yazılabilir. Burada A, sistemin katsayılar matrisi; X, bilinmeyenler matrisi; ve B, sabitler matrisidir. Sistemin "genişletilmiş katsayılar matrisi" $(A:B)$, katsayılar matrisine sabitler matrisinin eklenmesiyle oluşturulur. Gauss yok etme yöntemi, genişletilmiş katsayılar matrisine uygulanan "elementer satır işlemleri" (satır değiştirme, satır çarpma, satır ekleme) ile eşdeğerdir. Matris basamak formuna indirgendikten sonra, karşılık gelen lineer denklem sistemi yazılır ve çözümü yukarıda belirtilen kurallara göre yorumlanır.

Cramer Yöntemi

Son olarak, "Cramer yöntemi" belirli türdeki lineer denklem sistemleri için alternatif bir çözüm sunar. Bu yöntem, bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit olan (yani kare katsayılar matrisine sahip) ve katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olan sistemlere uygulanabilir. Çözüm, her bir $x_i, i=1,2….,n$ bilinmeyeni için $x_{i}=\frac{det(A_İ)}{det(A)}$ formülüyle hesaplanır. Burada A_i, $i=1,2….,n$ matrisi, A katsayılar matrisinin □. sütununun □ sabitler matrisiyle değiştirilmesiyle elde edilir. Cramer yöntemi, özellikle küçük sistemler için iyi bir çözüm alternatifidir. Ancak, eğer $detA=0$ ise, Cramer yöntemi doğrudan uygulanamaz. Bu durumda:

* Eğer $det(A)=0$ ve tüm $det(A_i)$ değerleri de sıfır ise, sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.
* Eğer $det(A)=0$ ancak $det(A_i)$ değerlerinden en az biri sıfırdan farklı ise, sistemin çözümü yoktur.

Cramer yöntemi, determinant hesaplamalarının karmaşıklığı nedeniyle büyük sistemler için Gauss yok etme yöntemine göre daha az verimli olabilir, ancak teorik önemi ve belirli durumlar için pratikliği büyüktür.
Bu ünite, lineer denklem sistemlerinin temel kavramlarını, çözüm yöntemlerini ve çözüm kümelerinin doğasını hem cebirsel hem de geometrik perspektiflerden sunarak, öğrencilere bu alanda sağlam bir temel oluşturmayı amaçlamaktadır.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Permütasyon ve Kombinasyon**
ÜNİTE NO **10**
YAZAR **Doç.Dr. YEŞİM AKBULUT**

GİRİŞ

Bu ünite, matematiksel sayma prensiplerinin temelini oluşturan permütasyon ve kombinasyon kavramlarını ayrıntılı bir biçimde ele almaktadır. Ünitenin temel hedefleri arasında, öğrencilerin bu kavramları doğru ve açık bir şekilde tanımlayabilmesi, ilgili temel problemleri çözebilmesi, tekrarlı ve dairesel permütasyon gibi özel durumları uygulayabilmesi, permütasyon ile kombinasyon arasındaki temel farkı açıklayabilmesi ve binom katsayılarını doğru biçimde hesaplayabilmesi yer almaktadır. Ele alınan bu konular, olasılık teorisi başta olmak üzere matematiğin diğer ileri alanları için sağlam bir altyapı oluşturmaktadır.

Sayma Kuralları

Ünite, "Sayma Kuralları" ile başlar. Bir kümenin eleman sayısını veya bir olayın olası sonuçlarının sayısını belirlemek için kullanılan bu kurallar, "Toplama Kuralı" ve "Çarpma Kuralı" olmak üzere iki temel prensibe ayrılır. Toplama kuralı, iki veya daha fazla olayın aynı anda gerçekleşmediği durumlarda, bu olaylardan birinin veya diğerinin toplam kaç farklı yolla gerçekleşebileceğini ifade eder. Eğer A olayı n farklı yolla ve B olayı m farklı yolla gerçekleşiyorsa ve bu olaylar birbirini dışlıyorsa, A veya B olayı n+m farklı yolla gerçekleşir. Bu kural, "veya" bağlacının kullanıldığı seçim problemlerinde uygulanır. Çarpma kuralı ise, bir A olayının n farklı yolla ve bu olaydan bağımsız bir B olayının m farklı yolla gerçekleştiği durumlarda, bu iki olayın birlikte (A ve B olayı) n.m farklı yolla gerçekleşeceğini belirtir. Bu kural, "ve" bağlacının kullanıldığı veya ardışık seçimlerin yapıldığı durumlarda kullanılır. Birden fazla olayın ardışık olarak gerçekleştiği senaryolarda, her bir olayın gerçekleşme sayılarının çarpımı toplam olası durum sayısını verir.

Sayma kurallarının ardından "Faktöriyel Kavramı" tanıtılır. Faktöriyel, 1'den n'ye kadar olan tüm pozitif doğal sayıların çarpımını ifade eder ve n! şeklinde gösterilir. 0! = 1 olarak kabul edilir. Faktöriyel, özellikle permütasyon ve kombinasyon formüllerinin temel bir bileşenidir ve n! = n(n-1)! veya n! = n (n-1) (n-2)! gibi özellikleri sayesinde karmaşık ifadelerin basitleştirilmesinde kullanılır.

Permütasyon

"Permütasyon" bölümü, nesnelerin belirli bir sıraya göre dizilmesi veya sıralanması kavramına odaklanır. n tane farklı nesneden r tanesinin seçilip sıralanmasına, n nesnenin r'li permütasyonu denir ve Pn, r ile gösterilir. Permütasyonun temel formülü Pn, r= n!(n-r)! şeklindedir. Bu formül, ilk elemanın n farklı şekilde, ikincinin (n-1) farklı şekilde ve r'incinin (n-r+1) farklı şekilde seçilebileceği mantığına dayanır. Özel durumlar olarak, n nesnenin tamamının sıralanması P(n, n) = n! ve n nesneden bir tanesinin sıralanması P(n, 1) = n olarak verilir. Permütasyon, "kaç farklı şekilde sıralanabilir", "kaç farklı sayı yazılabilir" gibi sıralamanın önemli olduğu problemlerde kullanılır.

Permütasyonun özel durumları olan "Tekrarlı Permütasyon" ve "Dairesel Permütasyon" da ayrıntılı olarak ele alınır. Tekrarlı permütasyon, bir kümedeki nesnelerin bazılarının özdeş olması durumunda kullanılır. Eğer n tane elemanın n1 tanesi birinci türden, n2 tanesi ikinci türden ve bu şekilde nr tanesi r'inci türden ise (n = n1 + n2 + … + nr), bu n elemanın farklı sıralanış sayısı n!n1!n2!…nk! formülü ile hesaplanır. Bu formül, özdeş elemanların kendi aralarındaki yer değişimlerinin yeni bir sıralama oluşturmamasını telafi eder. Dairesel permütasyon ise, n farklı elemanın dairesel bir düzen etrafına sıralanması durumunda kullanılır. Düz bir sıradaki sıralamadan farklı olarak, dairesel bir düzende bir elemanın sabitlenmesiyle n-1! farklı sıralama elde edilir. Anahtarlık problemleri gibi özel durumlarda, anahtarlığın ters çevrilebilme özelliği nedeniyle maskotsuz anahtarlıklar için n-1!2, maskotlu anahtarlıklar için ise n!2 formülleri kullanılır.

Kombinasyon

"Kombinasyon" kavramı, nesnelerin sıralama gözetmeksizin seçilmesi kavramını açıklar. n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin her birine n elemanın r'li kombinasyonu denir ve C(n, r) ile gösterilir. Kombinasyonun formülü Cn, r= n!r!n-r! şeklindedir. Bu formül, permütasyon sayısının, seçilen r elemanın kendi aralarındaki sıralama sayısı olan r!'e bölünmesiyle elde edilir; çünkü kombinasyonda sıralama önemli değildir. Kombinasyonun önemli özellikleri arasında C(n, 0) = 1 (boş küme), C(n, n) = 1 (kümenin kendisi), C(n, 1) = n (tek elemanlı alt kümeler) ve C(n, r) = C(n, n-r) (tamamlayıcı kombinasyonlar) bulunur. Kombinasyon, "kaç farklı grup oluşturulabilir", "kaç farklı alt küme vardır" gibi seçim odaklı problemlerde kullanılır. Ünite, permütasyon ve kombinasyon arasındaki temel farkı vurgular: permütasyonda sıralama veya dizilim önemlidir (örneğin, AB ≠ BA), kombinasyonda ise sadece seçim önemlidir (örneğin, {A, B} = {B, A}). Permütasyon ve kombinasyon arasındaki ilişki, Cn, r=Pn, rr! formülü ile ifade edilebilir.

Binom Açılımı

Son olarak, "Binom Açılımı" konusu ele alınır. a+bn şeklindeki ifadelerin açılımını ve bu açılımdaki katsayıları inceler. a+bn binom açılımı,

a+bn=r=0nCn,ran-rbr

formülüyle ifade edilir, burada Cn,r, binom katsayılarını temsil eder. Bu açılımda toplam n+1 adet terim bulunur. herhangi bir terimdeki a ve b'nin üsleri toplamı n'ye eşittir ve tüm katsayıların toplamı 2n'dir. Sabit terim, belirli bir terimin katsayısı ve katsayılar toplamı gibi özellikler de bu bölümde açıklanır.

Bu ünite, permütasyon, kombinasyon kavramları ve bunların uygulamalarını kapsamlı bir şekilde sunarak, öğrencilere olasılık ve istatistik gibi alanlarda karşılaşacakları daha karmaşık konular için sağlam bir temel sağlamaktadır.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **Olasılık**
ÜNİTE NO **11**
YAZAR **Prof.Dr. AYDIN GEZER**

OLASILIK TEORİSİ: TEMEL KAVRAMLAR, AKSIYOMLAR VE HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

Olasılık teorisi, rastlantısal fenomenlerin matematiksel bir çerçevede incelenmesini sağlayan, belirsizlik durumlarında karar verme sürecini rasyonelleştiren bir disiplindir. Günlük hayatta hava durumu tahminlerinden sigortacılığa, borsa analizlerinden genetik araştırmalara kadar çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu ünite, olasılığın temel yapı taşlarını ve bu yapı taşları arasındaki mantıksal ilişkileri ele almaktadır.

1. Temel Tanımlar: Deney, Örnek Uzay ve Olay

Olasılık hesaplamalarının temelinde üç ana kavram yatar:

- **Deney:** Sonucu önceden kesin olarak kestirilemeyen ancak tüm olası sonuçları bilinen eylemlerdir. Bir madeni paranın atılması veya bir zarın yuvarlanması en temel deney örnekleridir.
- **Örnek Uzay (S):** Bir deneyin mümkün olan tüm sonuçlarının kümesidir. Örneğin, bir zar atma deneyinde örnek uzay $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ elemanlarından oluşur. Örnek uzayın her bir elemanına örnek nokta denir.
- **Olay:** Örnek uzayın herhangi bir alt kümesidir. Bir zar atıldığında "çift sayı gelmesi" $(A = \{2, 4, 6\})$ bir olaydır. Eğer bir olay sadece tek bir örnek noktadan oluşuyorsa basit olay, birden fazla noktadan oluşuyorsa bileşik olay olarak adlandırılır.

2. Olaylar Üzerinde Cebirsel İşlemler

Olaylar küme mantığı ile işlendiğinden, kümelerdeki işlemler olasılıkta da geçerlidir:
Birleşim ($A \cup B$): A veya B olayından en az birinin gerçekleşmesi.
Kesişim ($A \cap B$): Hem A hem de B olayının aynı anda gerçekleşmesi.
Tümleyen (A'): A olayının gerçekleşmemesi durumu.
Ayrık Olaylar: Eğer iki olayın aynı anda gerçekleşmesi imkansızsa $(A \cap B = \emptyset)$, bu olaylara ayrık olaylar denir. Örneğin, bir paranın aynı anda hem yazı hem tura gelmesi imkansızdır.

3. Olasılık Aksiyomları ve Temel Özellikler

Modern olasılık teorisi, Rus matematikçi Kolmogorov tarafından ortaya konan üç temel aksiyom üzerine inşa edilmiştir:

1. Bir olayın olasılığı 0 ile 1 arasında bir değerdir $(0 \leq P(A) \leq 1).$
2. Kesin olayın (örnek uzayın tamamı) olasılığı 1'dir. $(P(S) = 1).$
3. Birbirinden ayrık olayların birleşiminin olasılığı, bu olayların ayrı ayrı olasılıklarının toplamına eşittir.

Bu aksiyomlardan türetilen önemli kurallar şunlardır:

- Boş kümenin (imkansız olay) olasılığı sıfırdır: $P(\emptyset) = 0.$
- Bir olayın gerçekleşme ve gerçekleşmeme olasılıklarının toplamı 1'dir: $P(A) + P(A') = 1.$
- Genel toplam kuralı: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

4. Eş Olumlu Örnek Uzayı ve Klasik Olasılık Tanımı

Eğer bir örnek uzaydaki her bir örnek noktanın gerçekleşme şansı birbirine eşitse (örneğin hilesiz bir zar), buna eş olumlu örnek uzayı denir. Bu durumda bir A olayının olasılığı şu formülle hesaplanır:
$P(A) = \frac{s(A)}{s(S)} = \frac{\text{İstenen Durum Sayısı}}{\text{Tüm Mümkün Durumların Sayısı}}$
Bu hesaplamalarda, eleman sayılarını bulmak için kombinasyon ve permütasyon gibi sayma yöntemlerinden sıklıkla yararlanılır.

5. Koşullu (Şartlı) Olasılık

Bazen bir olayın gerçekleşme olasılığı, başka bir olayın gerçekleşmiş olduğu bilgisine dayalı olarak değişir. B olayının gerçekleştiği bilindiğinde A olayının olasılığına koşullu olasılık denir ve şu şekilde hesaplanır:
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (P(B) > 0)$

6. Çarpım Kuralı ve Bağımsız Olaylar

Koşullu olasılık tanımından hareketle, iki olayın birlikte gerçekleşme olasılığı $(P(A \cap B))$ çarpım kuralı ile bulunur: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$
Bağımsızlık: Eğer bir olayın gerçekleşmesi, diğer olayın gerçekleşme olasılığını hiçbir şekilde etkilemiyorsa bu iki olay bağımsızdır. Matematiksel olarak, $P(A|B) = P(A)$ ise veya daha yaygın

kullanımıyla $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ eşitliği sağlanıyorsa olaylar bağımsızdır. Örneğin, iki farklı zarın atılması durumunda birinci zarın sonucu ikinciyi etkilemez.

7. Tam Olasılık ve Bayes Teoremi

Ünitenin en ileri konularından biri, bir sonucun farklı nedenlere bağlı olma durumunu inceleyen Bayes Teoremi'dir. Eğer bir örnek uzay birbirini dışlayan alt olaylara ayrılmışsa, gözlemlenen bir sonucun hangi alt olaydan kaynaklandığını bulmak için Bayes formülü kullanılır. Bu yöntem, özellikle tıp (test sonuçlarının analizi) ve yapay zeka alanında hayati öneme sahiptir.

8. Örnek Uygulamalar ve Stratejiler

Olasılık sorularını çözerken şu stratejiler izlenmelidir:

- Öncelikle deneyin örnek uzayı (S) net olarak belirlenmelidir.
- İstenen olayın (A) şartları tanımlanmalı ve eleman sayısı sayma kuralları (permütasyon/kombinasyon) ile bulunmalıdır.
- Olayların "ayrık" mı yoksa "bağımsız" mı olduğu ayrımı doğru yapılmalıdır; çünkü bu durum kullanılacak toplama veya çarpma kuralını belirler.

Sonuç olarak, bu ünite belirsizliğin matematiksel dilini öğretmektedir. Olasılık kavramları sadece teorik birer araç değil, veriye dayalı dünyada geleceğe yönelik öngörülerde bulunabilmenin ve riskleri yönetebilmenin temel anahtarıdır.

DERS ADI **Matematik II**
ÜNİTE ADI **İstatistik**
ÜNİTE NO **12**
YAZAR **Prof.Dr. AYDIN GEZER**

İSTATİSTİK

İstatistik, verilerin toplanması, düzenlenmesi, sunulması, yorumlanması ve bu yorumlar neticesinde belli bir sonuca karar verilmesiyle ilgilenen temel bir bilim dalıdır. Kökeni Almanya'da devlet anlamına gelen 'status' kelimesine dayanır ve fizik, doğa bilimleri, sosyal bilimler, ekonomi, ticaret ve hükümet gibi geniş bir yelpazede karar alma süreçlerinde kritik bir rol oynar.

Bazı Temel Kavramlar

Ana Kütle ve Örnek: Bir istatistiki araştırmaya konu teşkil eden tüm birimlere ana kütle denir. Zaman, iş gücü ve maliyet kısıtlamaları nedeniyle ana kütlenin tamamını incelemek her zaman mümkün olmadığından, ana kütleden tesadüfi olarak seçilen birimlerden oluşan gruba örnek denir.

Veri: İstatistiki bir gözlem sonucu olay veya nesnelerin ölçülebilen özellikleridir. Anket, araştırma, gözlem ve deney gibi yöntemlerle elde edilebilir. Herhangi bir kural gözetmeksizin kaydedilen verilere kaba veri seti denir.

Sayısal Veri: Aritmetik işlemlerde doğrudan kullanılabilen sayılardan oluşur (boy, kilo, yaş). Kendi içinde ikiye ayrılır:

Kesikli Veriler: Belirli bir aralıktaki her değeri alamayan verilerdir (ailedeki çocuk sayısı, haftanın günleri).

Sürekli Veriler: Belirli bir aralıktaki her değeri alabilen verilerdir (ağırlık, boy uzunluğu).

Kategorik Veri: Sayısal olmayan verilerden oluşur. Kendi içinde ikiye ayrılır:

İsimsel Veri: Cinsiyet, göz rengi gibi kategorik verilerdir.

Sıralı Veri: Eğitim düzeyi, akademik unvan gibi sıralanabilen kategorik verilerdir.

Frekans Dağılımları

Elde edilen verilerin küçükten büyüğe veya büyükten küçüğe sıralanmasıyla basit seri elde edilir. Veri sayısının fazla olduğu durumlarda, verileri daha anlaşılır hale getirmek için sınıflandırma veya gruplandırma yapılır.

Sınıflandırılmış Seri: Her bir x_i değerine karşılık gelen frekansın (bir verinin kaç defa tekrarlandığı) yazıldığı seridir.

Gruplandırılmış Seri: Farklı verilerin çok fazla olması durumunda serilerin özetlenmesi için kullanılır. Oluşturulması için veriler basit seri haline getirilir, değişim aralığı $(D.A.= X_{max}-X_{min})$ bulunur, sınıf sayısı belirlenir, sınıf büyüklüğü $(y=\frac{D.A}{\text{Sınıf Sayısı}})$ hesaplanır ve her grubun frekansı belirlenir. Gruplandırılmış seriler, sınıf uçlarının sınıf sınırlarına eşit olduğu sürekli gruplandırılmış seriler ve sınıf uçlarının farklı olduğu kesikli gruplandırılmış seriler olarak ayrılır. Bir sınıfın alt ve üst sınırlarının ortalaması sınıf değeri (veya sınıf orta değeri) olarak adlandırılır.

Nispi Frekanslar: Her bir frekansın serinin toplam frekansına bölünmesiyle elde edilen oranlardır. Toplamı 1'dir.

Kümülatif (Eklemeli) Nispi Frekanslar: Nispi frekansların ardışık sınıflar için toplanmasıyla oluşturulur (örneğin, '...den az' veya '...den çok').

Grafiksel Gösterimler:

Verilerin özetlenmesi, anlaşılması ve değişkenler arası ilişkilerin görünür hale getirilmesi için grafikler kullanılır.

Sütun Grafiği: Verilerin yatay eksen üzerinde sütunlarla gösterilmesiyle oluşur.

Daire Grafiği: Verilerin bir dairenin dilimleri şeklinde gösterilmesiyle elde edilir. Dilimlerin açısal değerleri nispi frekansların 360 ile çarpılmasıyla bulunur.

Histogram: Sürekli verilerin grafiksel gösterimidir. Sütun grafiğinden farklı olarak, dikdörtgenlerin taban uzunluğu sınıf büyüklüğünü, yüksekliği ise sınıfın frekansını temsil eder.

Merkezi Eğilim Ölçüleri:

Verilerin merkezîleştiği değerleri belirten, onların konumu hakkında bilgi veren ölçülerdir (yer ölçüleri).

Aritmetik Ortalama $(\bar{X})$: Merkezi eğilim ölçülerinin en çok kullanılanıdır ve serideki tüm birimleri içerir. Basit seride $\bar{X} =\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ formülüyle, sınıflandırılmış veya gruplandırılmış serilerde ise $\bar{X} =\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}$ formülüyle hesaplanır (x_i gruplandırılmış serilerde sınıf değeridir). Verilerin ağırlığı varsa ağırlıklı aritmetik ortalama $\bar{X} = \frac{\sum t_i x_i}{\sum t_i}$ ile bulunur. Nicel verilere uygulanabilir, bir değerdeki değişimlerden etkilenir ve verilerin ortalamadan farklarının toplamı sıfırdır.

Medyan (Ortanca): Serideki tüm birimlerine tabi olmayan, aşırı uç değerlerden etkilenmeyen bir merkezi eğilim ölçüsüdür. Veriler artan sırada düzenlendiğinde, veri sayısı tek ise $x_{(n+1)/2}$ terimi, çift ise $x_{n/2}$ ve $x_{n/2+1}$ terimlerinin aritmetik ortalaması medyandır. Gruplandırılmış serilerde medyan sınıfı belirlendikten sonra $Medyan= L _m+ \frac{(\frac{n}{2} n_m)}{f_m}.h$ formülüyle hesaplanır.

Mod (Tepe Değeri): Bir seride en çok tekrarlanan, yani frekansı en büyük olan değerdir. Sayısal ve sayısal olmayan veriler için kullanılabilir. Gruplandırılmış serilerde mod sınıfı (frekansı en büyük olan sınıf) belirlendikten sonra $Mod= L _1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.h$ formülüyle bulunur. Bir serinin birden fazla modu olabilir veya hiç modu olmayabilir.

Geometrik Ortalama (G.O.): ${x_1x_2....x_n}$ değerlerinin çarpımının n. kökü olarak tanımlanır ($G.O.= \sqrt[n]{x_1x_2....x_n}$). Hesaplamada değerler sıfırdan büyük olmak zorundadır. Logaritma kullanılarak $log (G.O.)=\frac{1}{n}(\sum log(x_i))$ veya sınıflandırılmış/gruplandırılmış seriler için $log (G.O.)= \frac{1}{\sum f_i}(\sum f_ilog(x_i))$ formülleriyle kolaylaştırılır.

Harmonik Ortalama (H.O.): Serideki değerlerin çarpmaya göre terslerinin aritmetik ortalamasının çarpmaya göre tersidir. Değerler sıfırdan büyük olmalıdır. Basit seride $H.O.= \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$, sınıflandırılmış/gruplandırılmış seride ise $H.O.= \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}$ formülleriyle hesaplanır.

Merkezi Dağılım Ölçüleri

Merkezi eğilim ölçüleri, grubun birimlerinin ne ölçüde farklı değerlere sahip olduğunu göstermez. Bu nedenle, verilerin değişkenlik durumunu ve dağılışın şeklini tespit etmek için merkezi dağılım ölçülerine ihtiyaç duyulur.

Değişim (Dağılım) Aralığı (D.A.): Bir serideki en büyük değer (X_{max}) ile en küçük değer (X_{min}) arasındaki farktır: $D.A.= X_{max}-X_{min}$.

Varyans (S2S2) ve Standart Sapma (S): Verilerin aritmetik ortalamadan farklarının karelerinin toplamının veri sayısına bölümü varyansı verir. Varyans, bir veri grubunda verilerin aritmetik ortalamadan ne kadar uzaklaştığının ölçüsüdür. Standart sapma ise varyansın pozitif kareköküne eşittir ($S=\sum S^{2}$). Standart sapmanın küçük olması, verilerin ortalamadan sapmasının az olduğunu; büyük olması ise sapmaların çok olduğunu gösterir. Basit seride varyans $S^{2}=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^{2} }{n}$ veya $S^{2}=\frac{\sum x_i^{2}}{n}-(\frac{\sum x_i}{n})^{2}$ ile, sınıflandırılmış/gruplandırılmış serilerde ise $S^{2}=\frac{\sum{f_i(x_i-\bar{X})}^{2} }{\sum{f_i}}$ veya $S^{2}=\frac{\sum f_ix_i^{2}}{\sum f_i}-(\frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i})^{2}$ formülleriyle hesaplanır.

Değişim Katsayısı (D.K.): Standart sapmanın ortalamanın bir yüzdesi olarak ifade edilmesidir: $D.K.=\frac{S}{X}.100$ Bu hesaplama ile ölçü birimlerinin etkisi giderilir, bu sayede farklı ölçü birimleriyle ifade edilen serilerin karşılaştırılması mümkün olur. Değişim katsayısı küçük olan serilerde, birimlerin ortalama etrafında daha uygun dağıldığı sonucuna varılır.